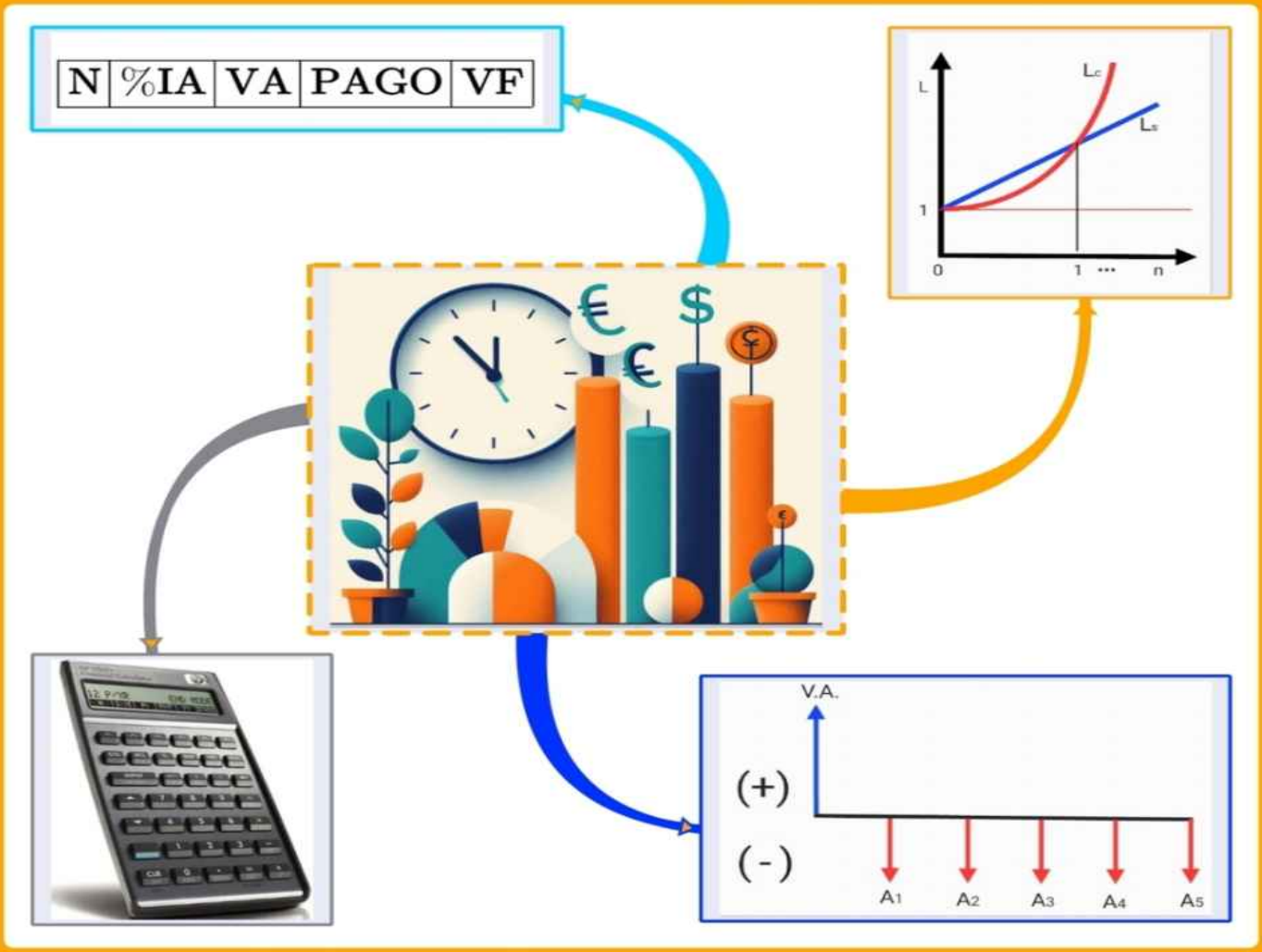
MATEMÁTICAS FINANCIERAS EN MAPAS MENTALES



Teoría y ejemplos resueltos con fórmulas, calculadora financiera y Excel

Artemio Rodríguez Prieto

MATEMÁTICAS FINANCIERAS EN MAPAS MENTALES

Teoría y ejemplos resueltos con fórmulas, calculadora y Excel

Artemio Rodríguez Prieto

ARP

Derechos de autor © diciembre 2023, Artemio Rodríguez Prieto

Todos los derechos reservados

Ninguna parte de este libro puede ser reproducida ni almacenada en un sistema de recuperación, ni transmitida de cualquier forma o por cualquier medio, electrónico, o de fotocopia, grabación o de cualquier otro modo, sin el permiso expreso del autor.

artemio@economia-excel.com

Acerca del autor

Artemio Rodríguez Prieto es economista, licenciado en Ciencias Económicas y Empresariales y máster en Economía Aplicada (Master of Arts in Economics) por la UNED.

También es diplomado en Estudios de Formación Bancaria por el CUNEF (Madrid).

Realizó su actividad profesional en banca durante 38 años y es autor del blog de contenido educativo Economía Excel, desde el año 2006.

A aquellos que disfrutan del lenguaje de los números, las letras y los gráficos, y que utilizan estas herramientas para expresar las maravillas de las artes y las ciencias.

Una inversión en conocimiento paga el mejor interés.

BENJAMIN FRANKLIN

Contenido

Página del título
Derechos de autor
Acerca del autor
Introducción
BLOQUE PRIMERO – CONCEPTOS BÁSICOS
1 Capital financiero
2 Comparación de capitales financieros
3 Ley financiera
4 Ejemplos de aplicación de una ley financiera
5 Clasificación de las leyes financieras
6 Montante y valor descontado
7 Interés y descuento
8 Cálculo del montante, interés, descuento y valor descontado
9 Suma financiera de capitales
10 Suma con leyes de capitalización
11 Ejemplo de suma con leyes de capitalización
12 Suma con leyes de descuento
13 Ejemplo de suma con leyes de descuento
14 Operación financiera
15 Saldo financiero
16 Cálculo del saldo financiero
17 Elementos de una operación financiera
18 Clasificación de las operaciones financieras
19 Diagramas de flujos financieros
20 Algunos ejemplos de diagramas tipo
21 Del diagrama a la calculadora y a Excel
BLOQUE SEGUNDO – LEYES FINANCIERAS CLÁSICAS
22 Ley de capitalización simple
23 Tipos de interés equivalentes en capitalización simple
24 Fórmulas de capitalización simple

25 Ejemplos de aplicación capitalización simple
26 Capitalización compuesta
27 Tipos de interés equivalentes en capitalización compuesta
28 Fórmulas de interés compuesto
29 Capitalización compuesta con calculadora
30 Capitalización compuesta con Excel
31 Ejemplos sobre la ley de capitalización compuesta
32 Capitalización simple vs compuesta
33 Ejemplo de aplicación del convenio lineal y exponencial
34 Ley de descuento comercial
35 Tipos de descuento comercial equivalentes
36 Fórmulas de descuento comercial
37 Ejemplos sobre descuento comercial
38 Ley de descuento racional
39 Tipos de descuento racional equivalentes
40 Fórmulas de descuento racional
41 Descuento comercial vs racional
42 Ejemplos sobre descuento racional
43 Descuento compuesto
44 Tipos de descuento compuesto equivalentes
45 Ejemplos sobre descuento compuesto
46 Suma de capitales (visión general)
47 Suma de capitales con leyes clásicas
48 Ejemplos de suma de capitales
49 Factor financiero
BLOQUE TERCERO – RENTAS
50 Rentas
51 Valoración de rentas
52 Propiedades de las rentas
53 Clasificación de la rentas
54 Fórmula para calcular el valor actual de la renta modelo
55 Valor actual de rentas constantes
56 Valor actual de rentas con calculadora y con Excel
57 Fórmula para calcular valor final de la renta modelo
58 Valor final de rentas constantes y temporales

59 Valor final de rentas constantes y temporales con calculadora y con Excel
60 Valor actual de rentas constantes fraccionadas
61 Valor final de rentas constantes fraccionadas
62 Ejemplos sobre rentas
BLOQUE CUARTO – RENTABILIDAD
63 Rentabilidad simple
64 Ejemplo sobre rentabilidad simple
65 Valor actual neto, VAN
66 Ejemplo sobre cálculo del VAN
67 Tasa interna de rentabilidad, TIR
68 Ejemplos sobre cálculo de la TIR
69 Tasa de rentabilidad efectiva, TRE
70 Ejemplo de cálculo TRE
71 Tasa de rentabilidad geométrica, TRG
72 Ejemplo de cálculo TRG
73 Rentabilidad real
74 Ejemplo de cálculo rentabilidad real
75 Tasa anual equivalente, TAE
76 Ejemplo de cálculo TAE
BLOQUE QUINTO – ALGUNAS APLICACIONES
77 Aplicación a c/c y de crédito
78 Ejemplo de liquidación c/c
79 Método hamburgués
80 Descuento comercial
81 Ejemplo sobre descuento comercial
82 Operaciones de constitución
83 Ejemplos de operaciones de constitución
84 Préstamos
85 Préstamo lineal
86 Préstamo francés
87 Ejemplos sobre préstamo francés
88 Préstamo americano
89 Valoración de renta fija
90 Ejemplos sobre valoración de renta fija
91 Tipos Spot y Forward a corto plazo

92 Tipos Spot y Forward a largo plazo
BLOQUE SEXTO – REPASO DE MATEMÁTICAS
93 Resolución de ejercicios
94 Operaciones con potencias
95 Operaciones con raíces
96 Operaciones con logaritmos
97 Propiedades de las ecuaciones
98 Pasos para despejar incógnitas
99 Cálculo de fechas con la calculadora financiera
100 Cálculo de fechas con Excel
Bibliografía

Introducción

Las competencias básicas para la vida son un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que permiten a las personas enfrentarse con éxito a los desafíos diarios, fijando objetivos realistas, tomando decisiones adecuadas, optimizando los recursos, buscando el bienestar emocional, etc. En definitiva, generado situaciones óptimas para la vida personal, profesional y social. Una de las competencias básicas para la vida en la actualidad es el conocimiento financiero. Esto se debe a la necesidad de su utilización por las familias, empresas y administraciones en los procesos de inversión y financiación para optimizar su bienestar y maximizar su riqueza.

Una parte significativa del conocimiento financiero se adquiere mediante el estudio de las matemáticas financieras, que son una rama de las matemáticas aplicadas a la economía. Se ocupan de calcular el valor del dinero en el tiempo, valoración de los activos financieros, la rentabilidad y la gestión de riesgos, en operaciones como: depósitos, préstamos, proyectos de inversión, bonos, obligaciones, acciones, fondos de inversión, planes de ahorro, planes de pensiones, rentas, etc.

Este libro tiene como objetivo acercar de una forma sencilla y práctica las matemáticas financieras al lector que desee adquirir estos conocimientos y estas competencias, utilizando como herramienta principal para su aprendizaje, mapas mentales explicados.

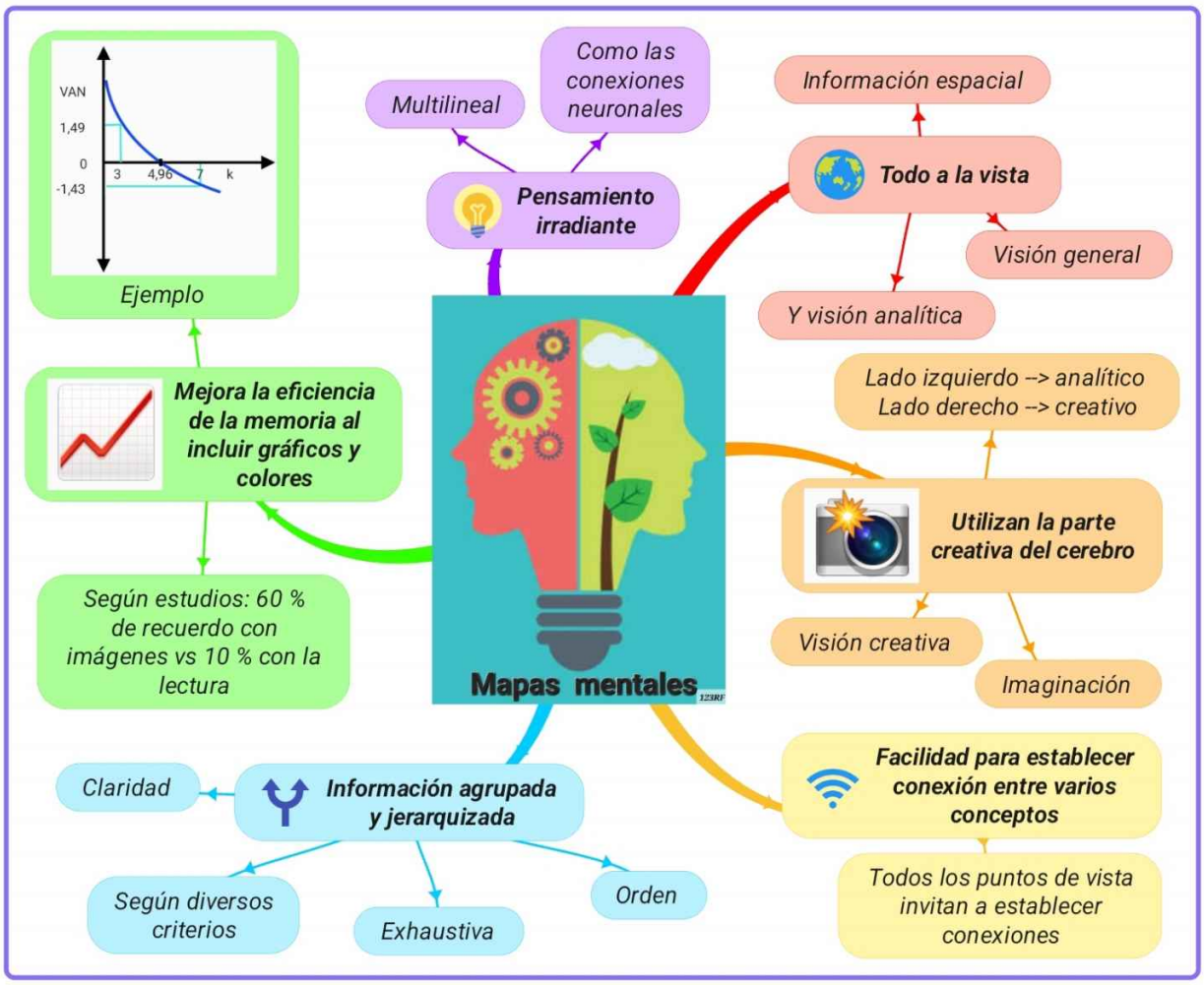
Tradicionalmente en el estudio de la economía se suele emplear tres instrumentos o lenguajes: las palabras, las matemáticas y los gráficos. En este libro, además de las anteriores, vamos a utilizar también: mapas mentales, calculadora financiera, y Excel.

¿Por qué, en mapas mentales? Porque es una herramienta moderna de pensamiento que ayuda notablemente al estudio, comprensión, memorización y relación de conceptos…, de cualquier materia. Fueron impulsados por Tony Buzan a partir de la década de

1960. Y actualmente se está utilizando en numerosos centros educativos y en el mundo de la empresa.

Los mapas mentales son parte del método *visual thinking*, que consiste en pensar y comunicarse entre las personas con imágenes, principalmente gráficos y dibujos. De acuerdo con estudios, se habla de rendimientos del 60 % en memorización, con imágenes, frente al 10 % con lectura. Este método ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos años por la facilidad de uso en pantallas. Esto no quiere decir que no tenga historia. Existen numerosos ejemplos de su utilización desde hace tiempo y en todas las épocas, por ejemplo los dibujos de Altamira, los jeroglíficos egipcios, los dibujos de Leonardo da Vinci, gráficos estadísticos desde el siglo XVIII, el árbol de la vida de Darwin, la realización de mapas, etc.

Podemos continuar enumerando ventajas y características de esta herramienta, pero dado el objetivo de este libro, vamos a explicarlas en un mapa mental, que a su vez sirve de ejemplo. Lo llevamos a cabo en cada una de las ramas que salen de la imagen central.



Las ramas de los mapas suelen leerse en el sentido de las agujas de un reloj, pero dado su forma de expresión irradiante se pueden ver en cualquier otro orden.

Como se puede apreciar, su potencial para tareas de estudio y trabajo profesional es elevado, por lo que recomiendo al lector que los utilice en su actividad diaria.

La creación de mapas es sencilla. Solo se necesita papel, bolis o lápices de colores, una mente abierta e imaginación. Se coloca la idea principal en el centro del folio y se van desarrollando varias ramas que irradian desde la imagen central hacia el exterior con los temas más importantes relacionados con la idea principal. De estas ramas brotan otras adicionales para desarrollar la idea hasta un nivel

determinado. Sobre cada rama se colocan palabras clave e imágenes relacionadas que ayudan a recordar el contenido del mapa.

Aunque la confección manual es sencilla, como alternativa hay varias aplicaciones para tableta, móvil y ordenador que facilitan su elaboración y uso. Los mapas de este libro se realizaron con la aplicación SimpleMind Pro.

La calculadora y Excel; ya se utilizan en la práctica cotidiana por personas que se dedican a las finanzas, en los mercados financieros y en las empresas. Trabajaremos con la calculadora HP 17BII +, pero si el lector tiene otra marca o modelo, también puede usarla para resolver los ejemplos de este libro, porque funcionan de manera similar, al menos con el menú del valor del dinero en el tiempo VDT o TVM (en inglés).

El método de estudio propuesto es mostrar un mapa mental sobre un concepto importante y a partir de él desarrollar diversas ramas explicativas con fórmulas y gráficos. A continuación, con el fin de mejorar la comprensión del mapa, se amplía la explicación de las distintas ramas mediante palabras.

Se recomienda, al menos en una primera lectura, tener en cuenta el orden secuencial de los capítulos.

Después de explicar los conceptos teóricos se incluyen varios ejemplos prácticos resueltos mediante fórmulas, calculadora y Excel. La solución también se muestra en forma de mapa mental.

Es recomendable que el lector resuelva los ejemplos empleando las tres herramientas mencionadas, y cree sus propios mapas mentales que le ayudarán a estudiar esta materia y a un repaso rápido posterior.

La estructura del libro está formada por 100 capítulos agrupados en los seis bloques siguientes:

- ✓ Conceptos básicos

- ✓ Leyes financieras clásicas
- ✓ Rentas
- ✓ Rentabilidad
- ✓ Aplicaciones
- ✓ Repaso de matemáticas

El contenido está desarrollado en 150 mapas mentales, entre teoría y ejemplos prácticos.

Al final del libro se relaciona una bibliografía útil para la ampliación y consulta de conocimientos sobre esta materia.

***

BLOQUE PRIMERO – CONCEPTOS BASICOS

Lo que de raíz se aprende nunca del todo se olvida.

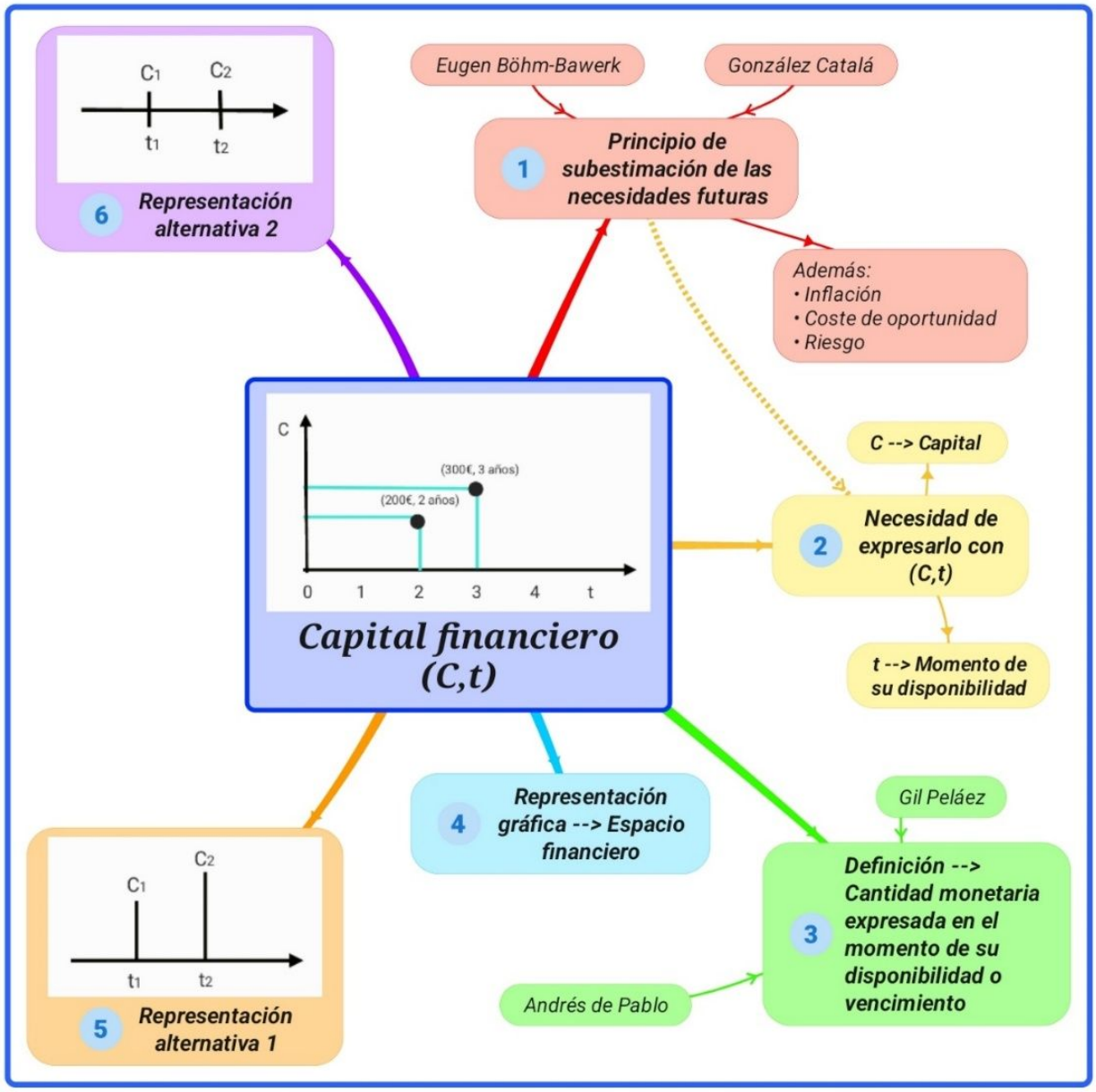
LUCIO A SÉNECA

El principio es la mitad del todo.

PITÁGORAS

1 Capital financiero

La matemática financiera estudia el valor de un capital financiero en diferentes momentos de tiempo. En consecuencia, el concepto de capital financiero es el punto de partida para el estudio de esta materia y constituye su elemento de trabajo principal. En este mapa, trataremos sobre su fundamento, definición y representación gráfica.



El número que figura en cada rama se corresponde con el de las explicaciones siguientes, realizadas en forma de texto. Esta forma de exposición la utilizaremos en todo el libro para explicar los mapas.

(1) Principio de subestimación de las necesidades futuras.

Para entender el concepto de capital financiero es necesario usar este principio económico. Fue desarrollado por varios autores. Pero destaca la aportación del economista austriaco Eugen Böhm-Bawerk, quien dijo: "*Las necesidades presentes son más urgentes, conocidas, y sentidas que las futuras, debido a la falta de previsión e incertidumbre de las personas sobre el consumo futuro"*.

También lo explicó el profesor González Catalá: "*Todo sujeto económico subestima las necesidades futuras respecto de las presentes, lo que equivale a considerar o interpretar el tiempo como un bien económico negativo, pues la apreciación de todo bien disminuye a medida que el tiempo de disponibilidad está más alejado*".

Ver detalle de las obras de los autores citados en este libro, en la bibliografía.

La subestimación de las necesidades futuras implica que cualquier persona razonable consumirá toda su renta en el presente, a no ser que reciba una compensación por prestarla y disfrutarla en el futuro cuando le sea devuelta. Esta compensación es el interés y será pagada por el prestatario que dispone del capital prestado.

En otras palabras, dos capitales de la misma cuantía en momentos diferentes no son equivalentes, debido a que existe un coste o tipo de interés en pago de su diferimiento temporal.

El principio de subestimación de las necesidades futuras es la base de la matemática financiera y es suficiente para explicar el concepto de capital financiero, pero además, existen otras razones por las que preferimos una misma cuantía de capital en el momento presente en vez de en el futuro:

- ✓ Pérdida de poder adquisitivo debido a la inflación esperada.
- ✓ Coste de oportunidad por no tener el dinero en nuestro poder.
- ✓ Riesgo de crédito por el préstamo concedido.

(2) **Expresión**. En consecuencia, para expresar un capital financiero establecido de acuerdo con el principio señalado, usamos dos parámetros (C,t). Donde (C) es la cuantía y (t) el momento de su disponibilidad. No basta con decir solo la cantidad, sino que también hay que indicar el tiempo.

(3) **Definición.** A partir de la argumentación anterior, se han presentado, por autores destacados en esta área, diversas definiciones de capital financiero. Mencionamos algunas:

Según Gil Peláez, un capital financiero es: "*La medida de un bien económico referido al momento de su disponibilidad o vencimiento*" y

Según Andrés de Pablo: "*La medida de cualquier activo real o financiero, expresado por su cuantía y por su vencimiento o momento de disponibilidad.*"

En resumen, el concepto de capital financiero es una cuantía monetaria expresada en el momento de su disponibilidad o vencimiento. Por ejemplo, $100.000 €$ el 20 de octubre de 2023.

(4) **Espacio financiero**. Podemos representar gráficamente los capitales financieros de varias formas. Una es la que figura en el centro del mapa. Se realiza en el primer cuadrante cartesiano, donde el eje vertical es la cuantía y el horizontal el tiempo. A esta representación le llamamos espacio financiero y estamos suponiendo que los capitales son positivos.

Otro enfoque es considerar en la expresión (C,t), la cuantía (C) positiva cuando es un ingreso para el sujeto económico y negativa cuando es un pago, sin que ello modifique el concepto de capital financiero. Este punto de vista lo utilizaremos más adelante al tratar la representación mediante diagramas de flujos financieros o de caja.

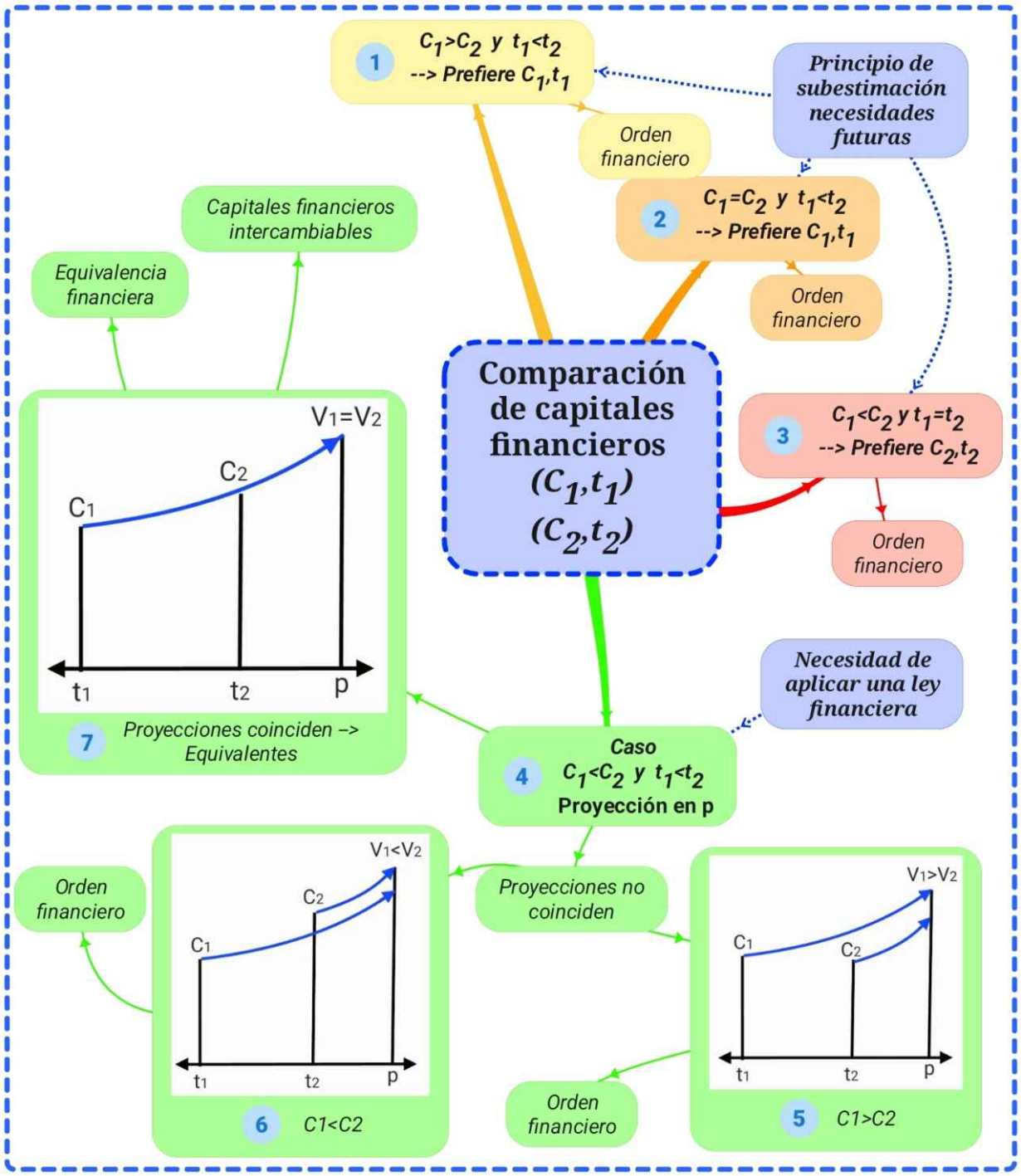
(5) **Gráfico de barras**. Otra forma de representación es trazando gráficos de barras proporcionales a la cuantía de los capitales sobre una línea horizontal que indica el momento de su disponibilidad.

(6) **Línea temporal**. Este gráfico es similar al anterior, con la diferencia que las barras no son proporcionales a la cuantía de los capitales.

***

2 Comparación de capitales financieros

Ya hemos visto el concepto de capital financiero. Ahora vamos a analizar la comparación de varios capitales realizando su proyección, mediante la aplicación de una ley financiera, en el momento (p). Para simplificar la explicación, usaremos solo dos. En este proceso pueden darse las siguientes situaciones:



(1) **$C_1>C_2$ y $t_1<t_2$**. En este caso es preferible el capital (C_1,t_1); tiene una mayor cuantía y menor vencimiento.

(2) **$C_1=C_2$ y $t_1<t_2$**. En esta situación es preferible (C_1,t_1) porque tiene la misma cuantía y menor vencimiento.

(3) **$C_1<C_2$ y $t_1=t_2$**. Es preferible (C_2,t_2); tiene una mayor cuantía e igual vencimiento.

Para resolver las tres comparaciones anteriores es suficiente con la aplicación del principio de subestimación de las necesidades financieras. Los resultados son la obtención del orden financiero de preferencia entre los dos capitales comparados.

(4) **Cuarto, $C_1<C_2$ y $t_1<t_2$**. Situación indeterminada hasta que realicemos una proyección de ambos capitales en el momento (p) mediante la aplicación de una ley financiera. Los resultados pueden ser los siguientes: $(C_1,t_1)>(C_2,t_2)$, figura (5); $(C_1,t_1)<(C_2,t_2)$, figura (6); o $(C_1,t_1)=C_2,t_2)$, figura (7). Los dos primeros resultados muestran una situación de orden financiero, mientras que el último $(C_1t_1)=C_2,t_2)$ nos indica una situación de equivalencia financiera.

(5) **Preferencia de (C_1,t_1)**. En este caso la proyección del (C_1,t_1) es superior a (C_2,t_2) por lo que el primer capital es preferido al segundo. En consecuencia, en este supuesto no hay equivalencia financiera.

(6) **Preferencia de (C_2,t_2).** Se muestra en esta figura que el valor de la proyección de (C_1,t_1) es inferior a la de (C_2,t_2). Situación de orden financiero también y que no existe equivalencia financiera.

(7) **Equivalentes**. En este caso el valor de las proyecciones en (p) coinciden, por lo que podemos decir que (C_1,t_1) y (C_2,t_2) son equivalentes. Dichas proyecciones se realizan, como ya se ha mencionado, mediante la aplicación de una ley financiera a los dos capitales financieros valorándolos en el mismo momento (p) y el resultado es $V_1=V_2$. Los capitales (C_1,t_1) y (C_2,t_2) son equivalentes porque tiene la misma valoración.

El momento (p) puede ser cualquier otro, aunque es habitual efectuar la valoración en la fecha inicial cuando utilizamos leyes de descuento y en la fecha final con leyes de capitalización.

Los capitales equivalentes pueden intercambiarse en los mercados financieros dando origen al concepto de operación financiera.

La equivalencia financiera es muy importante porque facilita:

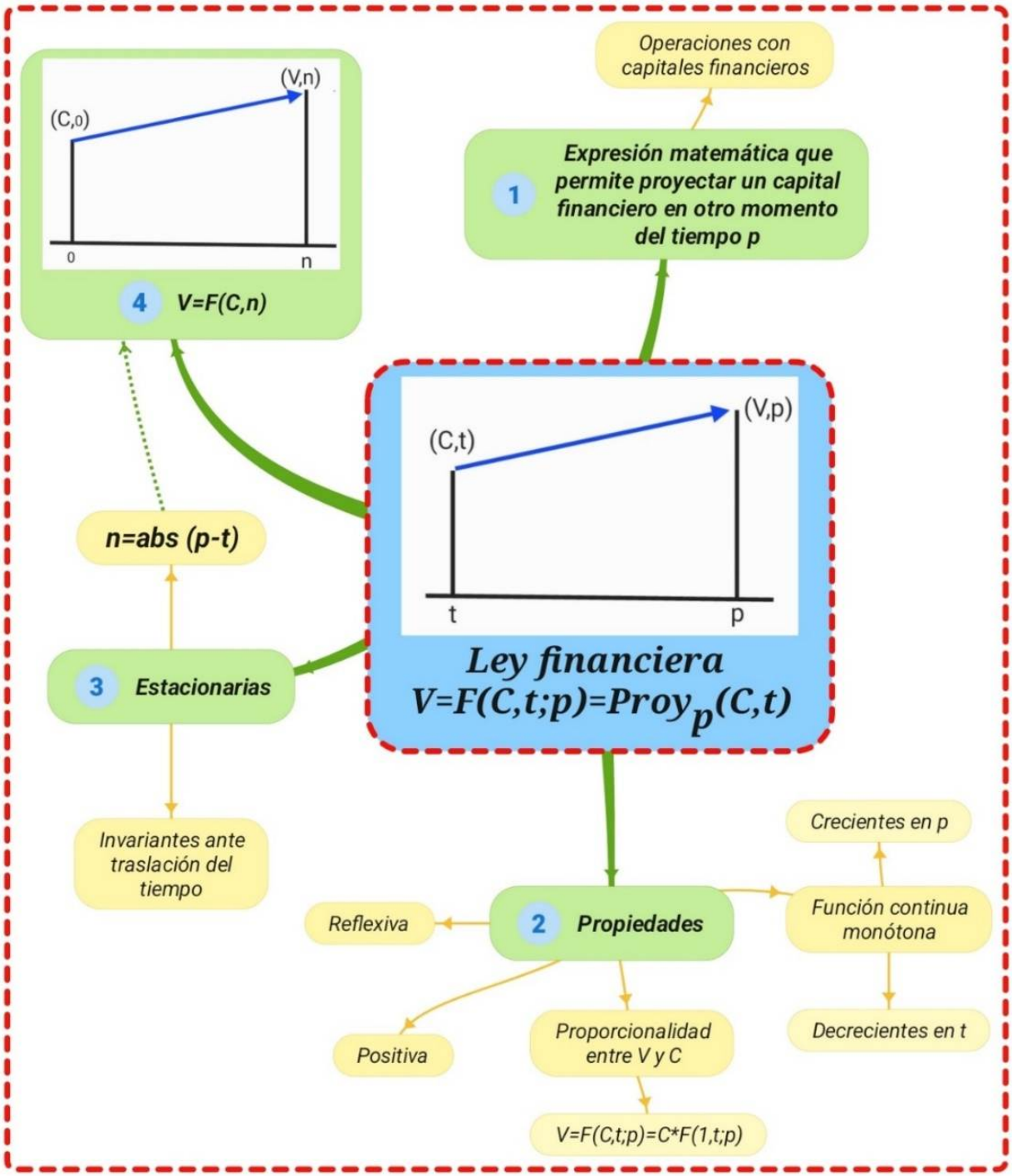
- ✓ Buscar para un capital dado, su equivalente en el momento (p), en operaciones simples (un solo capital).
- ✓ Calcular el capital suma en el momento (p), equivalente a la suma del valor de varios capitales, en operaciones complejas.
- ✓ Realizar desdoblamiento de capitales, también en operaciones complejas (varios capitales).

Estos conceptos los desarrollaremos más adelante.

***

3 Ley financiera

En el mapa anterior hemos hablado de la ley financiera como instrumento para la proyección de capitales. Ahora trataremos de profundizar en su concepto, propiedades y características.



(1) **Expresión matemática**. Una ley financiera se define como una expresión matemática que permite llevar a cabo la proyección o traslado de capitales en el tiempo, al momento (p), obteniendo

capitales equivalentes que se puedan intercambiar para formalizar operaciones financieras.

Por consiguiente, es una herramienta para calcular la equivalencia financiera. Matemáticamente, se expresa V=F(C,t;p). Esta función indica que (V) es un capital financiero resultado de la proyección de (C,t) en el momento (p). La función (F) es una ley financiera genérica que se desglosará más adelante en leyes de capitalización o descuento.

(2) **Propiedades.** Las leyes financieras deben tener las siguientes propiedades:

- ✓ Aplicadas a un capital financiero positivo genera otro positivo.
- ✓ Son proporcionales a la cuantía del capital. Esto permite operar con leyes unitarias, C=1, obteniendo la proyección de cualquier capital multiplicando su cuantía por la ley unitaria F(1,t;p).
- ✓ Son crecientes en el tiempo, compensando la pérdida de disfrute del capital en el presente con la obtención de un mayor capital en el futuro.
- ✓ Trasladan capitales hacia delante o hacia atrás en el tiempo.

(3) **Estacionarias**. Una característica importante de las leyes financieras es que son estacionarias. Es decir, invariantes respecto al tiempo, lo que nos permite calcular los capitales utilizando el tiempo interno de las operaciones al que llamamos (n) y que es el valor absoluto entre los momentos (p) y (t) → n=|p-t|. Es decir, se utiliza el tiempo en el número de períodos que dura la operación: años, meses, semestres, trimestres, días, etc.

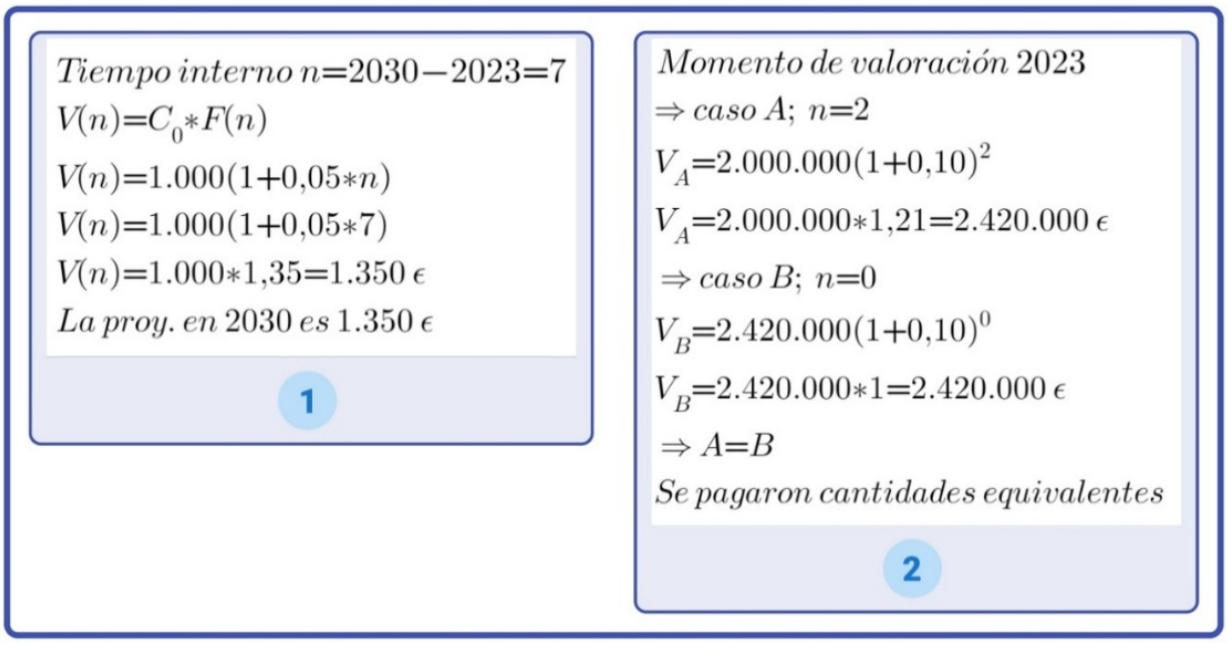
(4) **Gráfico**. Esta es la representación de lo indicado en los puntos anteriores. Es decir, la proyección de un capital (C,0) en el momento (n), siendo (n) el tiempo interno de la operación. Resultando el capital financiero (V,n). Las barras verticales son los capitales inicial y final, respectivamente, proyectados sobre una línea de tiempo horizontal.

***

4 Ejemplos de aplicación de una ley financiera

1.- Dado un capital (1.000 €, en 2023). ¿Cuál es su proyección en el año 2030 utilizando la ley financiera F(n)=1+0,05*n?

2.- Un equipo de futbol adquirió el jugador A en el año 2021 por 2.000.000 € y el jugador B en el año 2023 por 2.420,000 €. ¿Han pagado capitales equivalentes por ambos jugadores aplicando la ley financiera F(n)= $(1+0,10)^n$?



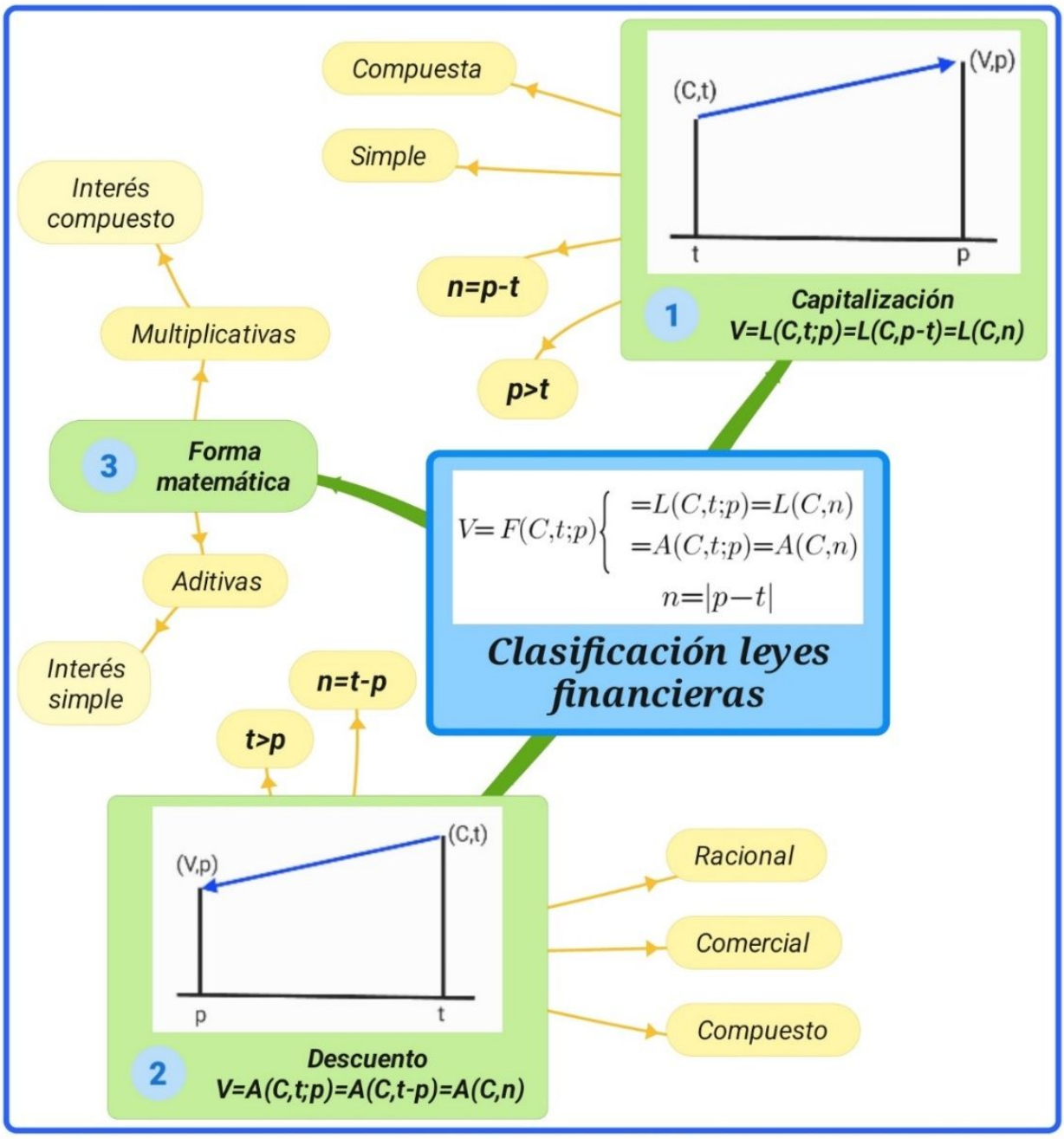
Estos dos ejemplos muestran la aplicación de leyes financieras genéricas. Todavía no hemos estudiado la clasificación en leyes de capitalización o descuento. Lo haremos en el próximo mapa. No obstante, podemos avanzar que en ambos casos se trata de una ley de capitalización, porque proyecta los capitales hacia delante en el tiempo.

Los ejemplos también muestran la aplicación de la propiedad de "proporcionalidad de las leyes financieras", mediante la cual el capital proyectado es igual al capital inicial multiplicado por la ley financiera unitaria, $V_n=C_0(F(n))$.

***

5 Clasificación de las leyes financieras

Vamos a desglosar la ley financiera genérica indicada anteriormente en leyes de capitalización o descuento.



El criterio de clasificación aplicado es la dirección hacia donde se proyectan de los capitales en el tiempo, es decir: capitalización

L(C,t:p) cuando la proyección es hacia delante y descuento A(C.t:p) cuando es hacia atrás. Además, cambiamos la notación (F) de la ley genérica, por (L), en capitalización, y por (A), en descuento. También calculamos y representamos en el eje horizontal el tiempo interno (n), que es el valor absoluto de t-p.

(1) **Capitalización**. Esta es una representación de la ley de capitalización que proyecta un capital (C,t) hacia la derecha de su vencimiento. El momento (p) fijado es posterior al momento (t) y el tiempo interno (número de períodos) de la operación es n=p-t. Suele utilizarse la notación (V,p)=L(C,t;p) o bien V=L(C,n), donde n=p-t.

A su vez, estas leyes se clasifican en capitalización simple y capitalización compuesta en función de la forma en que se acumulen los intereses. En el bloque dedicado a las leyes clásicas, las veremos con más detalle al tratarlas de forma individual.

(2) **Descuento**. Las leyes de descuento proyectan un capital (C,t) hacia la izquierda en la línea temporal. El momento (p) es anterior al momento (t), y el tiempo interno de la operación es n=t-p. En la notación utilizamos (V,p)=A(C,t;p) o bien V=A(C,n), dado que n=t-p.

La clasificación continúa con: descuento racional, comercial y compuesto, que veremos más adelante.

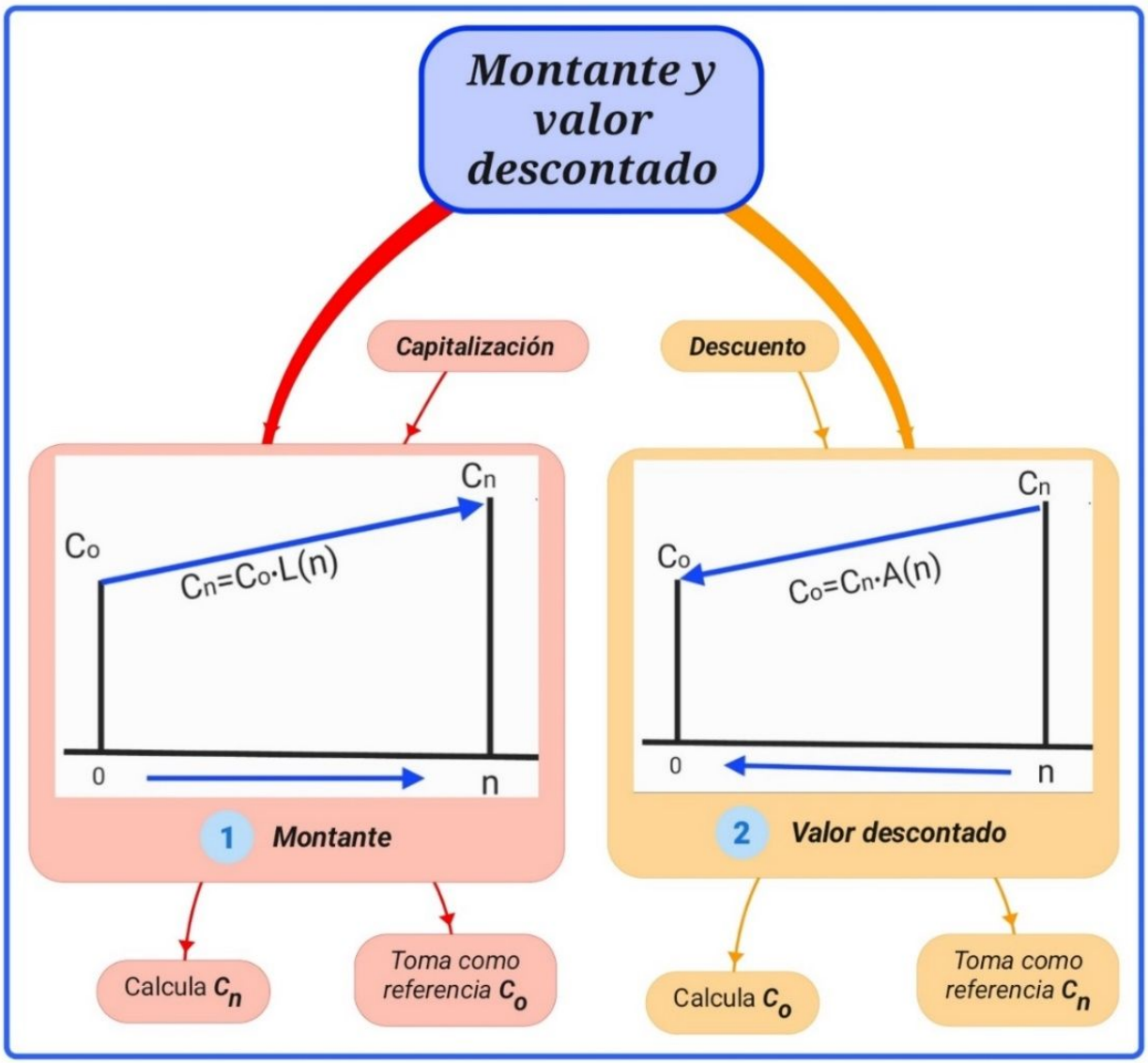
(3) **Forma matemática**. Otra clasificación de las leyes es por su forma matemática. Las aditivas (por ejemplo, capitalización simple) son leyes en las que los rendimientos de un período no se acumulan al siguiente para generar nuevos intereses. La forma funcional es lineal.

En las multiplicativas (compuestas) se acumulan los intereses producidos en cada período al capital anterior para generar nuevos intereses, dando origen a una función exponencial.

***

6 Montante y valor descontado

La propiedad de proporcionalidad de las leyes financieras respecto a la cuantía del capital, comentada en el mapa (3), nos permite obtener la proyección de un capital multiplicando su cuantía por una ley financiera unitaria determinada. Por ejemplo, en capitalización: V=L(C,n) → V=C*L(n). En esta función estamos sacando (C) fuera del paréntesis, como factor que multiplica a L(1,n).



En este mapa y los siguientes en vez de (V) y (C) genéricos, adoptamos la notación: C_0 = Capital inicial; C_n = Capital final o

montante, y n=Tiempo interno de la operación (n=lp-tl).

(1) **Montante**. La aplicación de una ley de capitalización realiza la proyección de un capital C_0 durante (n) períodos para obtener el capital equivalente C_n. Este último se denomina montante y se obtiene multiplicando la cuantía del capital inicial por la ley unitaria de capitalización: $C_n=C_0*L(n)$. Esta ley calcula C_n tomando como referencia C_0.

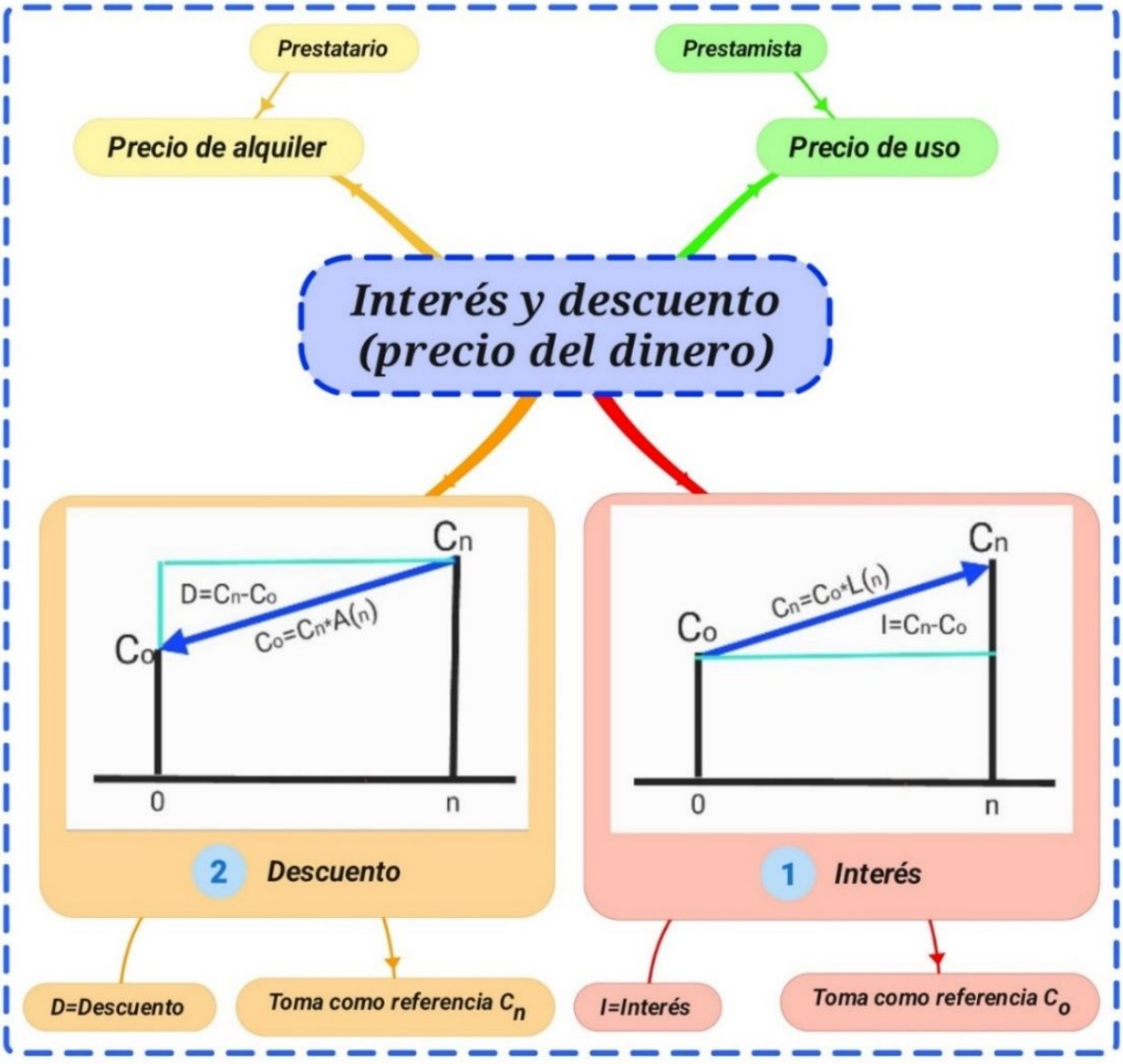
(2) **Valor descontado**. La aplicación de una ley de descuento realiza la proyección de un capital C_n durante (n) períodos para obtener el capital equivalente C_0, que llamamos valor descontado. Se obtiene multiplicando la cuantía del montante por la ley unitaria de descuento: $C_0=C_n*A(n)$. En este caso la ley calcula C_0 y toma como referencia C_n.

***

7 Interés y descuento

Desde el punto de vista del prestamista, el interés o el descuento, son el precio por la cesión de uso de un capital financiero.

Desde la perspectiva del prestatario son el precio o alquiler que paga por disfrutar de dicho capital en el momento presente.



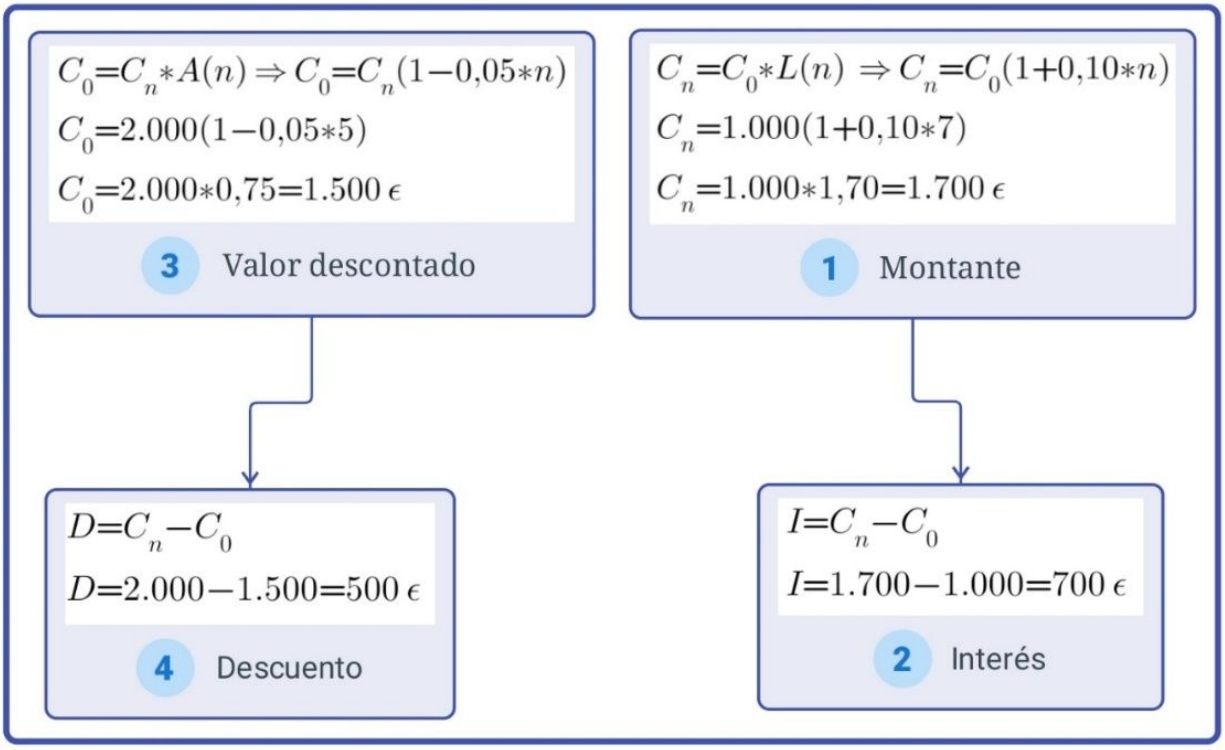
(1) **Interés.** En las operaciones de capitalización es la diferencia entre el montante y el capital inicial, $I=C_n-C_0$.

(2) **Descuento**. Es la diferencia entre el capital final y el valor descontado, $D=C_n-C_0$.

***

8 Cálculo del montante, interés, descuento y valor descontado

1.- ¿Cuánto es el montante del capital (1.000 €, 2023), en el año 2030, utilizando la ley financiera L(n)=1+0.10*n?
2.- Calcula el interés en la operación anterior.
3.- ¿Cuánto es el valor descontado del capital (2.000 €, 2028), en el año 2023, utilizando la ley financiera A(n)=1-0,05*n?
4.- Calcula el descuento en la operación anterior.



El número indicado en las soluciones se corresponden con el de las preguntas.

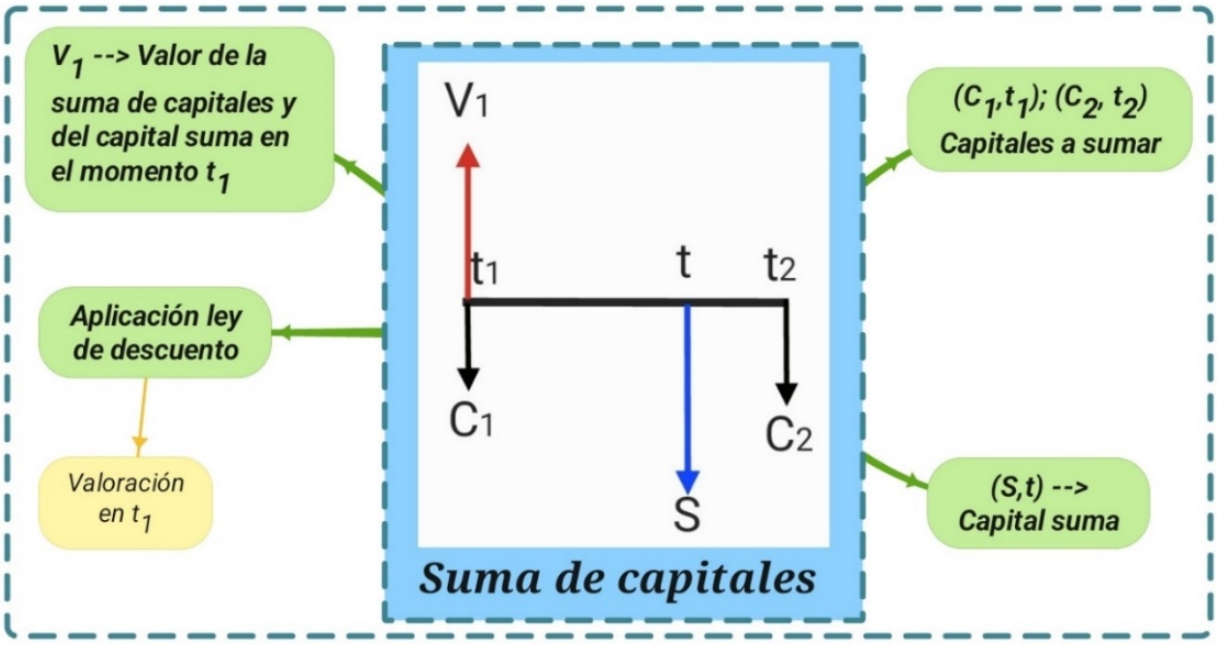
El montante es el resultado de aplicar la ley de capitalización L(n); y el valor descontado el resultado aplicar la ley de descuento A(n).

El interés y el descuento se obtienen como la diferencia entre C_n-C_0.

***

9 Suma financiera de capitales

Dados varios capitales financieros y una ley financiera, el capital suma (S) es el que proyectado en un momento determinado es igual a las proyecciones de los capitales sumados, C_1 y C_2, en el mismo momento. En el gráfico V_1 es el valor de las proyecciones en t_1.



La idea intuitiva es mover todos los capitales a un momento determinado aplicando una ley financiera y sumarlos.

Cuando se utiliza una ley de capitalización se suele elegir como momento de valoración el vencimiento del último capital. Y con una ley de descuento se toma como referencia el vencimiento del primer capital.

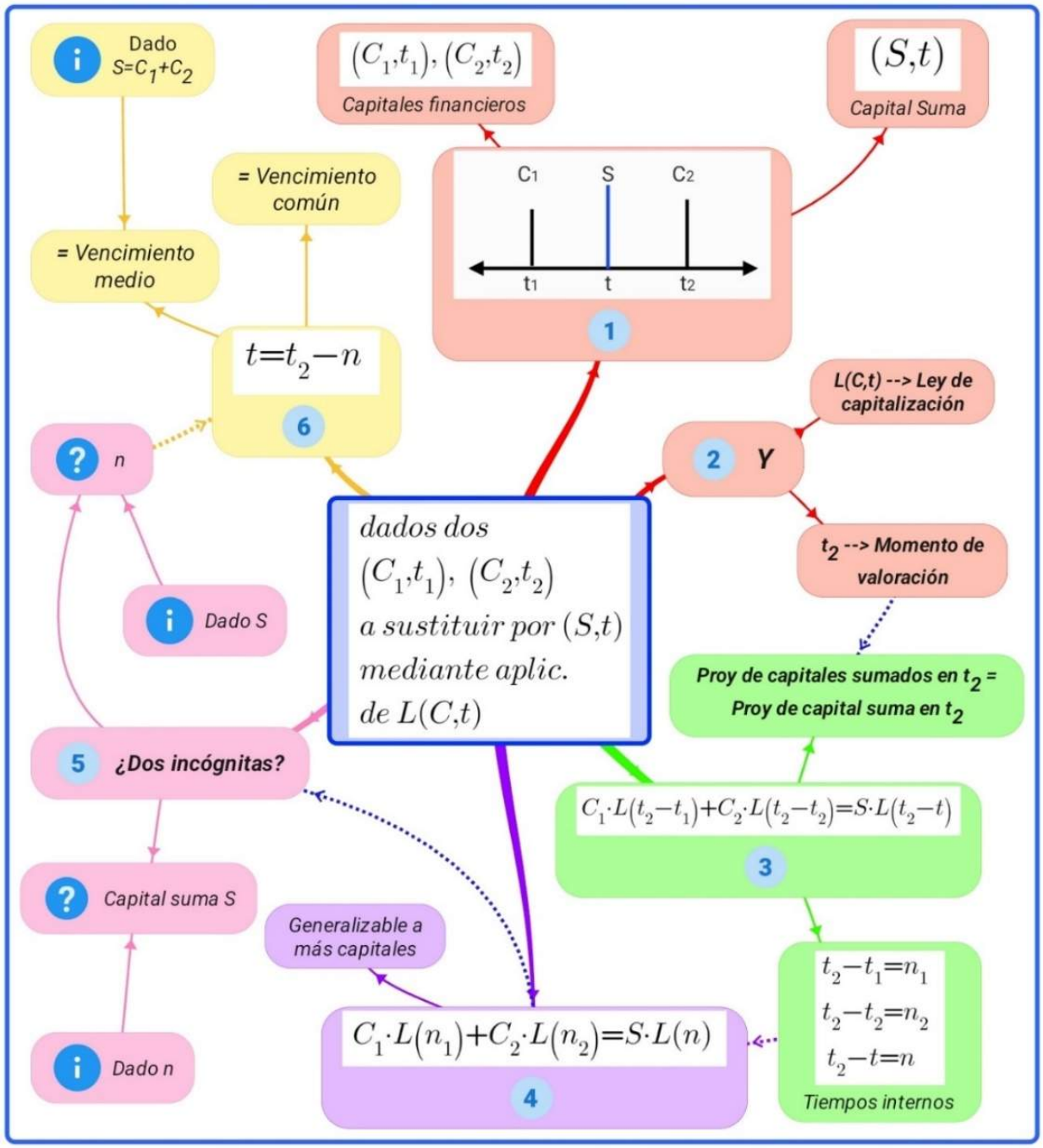
La suma financiera se utiliza para operar con varios capitales, por ejemplo, en la sustitución de varios capitales por uno solo. Además, es útil para explicar el concepto de operación financiera y calcular el saldo financiero, que veremos en los capítulos siguientes.

Considerando que el momento de valoración en la suma de capitales es distinto según se trate de leyes de capitalización o descuento, estudiaremos el detalle de cada caso por separado en los mapas siguientes.

***

10 Suma con leyes de capitalización

Utilizaremos dos capitales financieros para simplificar, pero las ecuaciones son generalizables a un mayor número de capitales.



(1) **Representación.** Dados dos capitales financieros, (C_1,t_1) y (C_2,t_2) se trata de calcular el capital suma (S,t) equivalente, mediante la aplicación de una ley financiera de capitalización.

(2) **Momento.** Al trabajar con una ley de capitalización L(C,n), fijamos el momento de valoración en el vencimiento del último capital, que en este caso es t_2.

(3) **Ecuación**. Para realizar la operación utilizamos esta ecuación de equivalencia financiera, en la que la proyección de los capitales sumados es igual a la proyección del capital suma.

(4) **Ecuación con los tiempos internos**. La ecuación anterior la expresamos en función de los tiempos internos de los capitales (n_1), (n_2), y (n) del capital suma. Calculados con referencia al vencimiento del último capital.

(5) **Dos incógnitas**. En la ecuación anterior hay dos incógnitas:

- ✓ El capital suma (S), cuando conocemos su tiempo interno (n).
- ✓ El vencimiento común (n), cuando fijamos un capital suma (S). Un caso particular de este, es el vencimiento medio (n), cuando el capital suma es $S=C_1+C_2$.

(6) **Vencimiento del capital suma.** Dado que el resultado (n) es el tiempo interno del vencimiento medio o el vencimiento común, para obtener la fecha del vencimiento del capital suma hay que realizar la operación $t=t_2-n$. Es decir, restar a la fecha de vencimiento del último capital el valor de (n). Lo veremos con un ejemplo en el mapa siguiente.

***

11 Ejemplo de suma con leyes de capitalización

Dados los capitales financieros (100; 2018), (200; 2020) **y** (250; 2023), **y la ley financiera de capitalización L(n)=1+0.10*n, calcula:**

1. **El capital suma en el** 2022.
2. **El vencimiento común para un capital suma de** 500.
3. **El vencimiento medio.**

$n=1$ *incognita* S?

planteamos la equivalencia financiera:

$100(1+0{,}10*5)+200(1+0{,}10*3)+250=S(1+0{,}10*1)$

$150+260+250=S*1{,}10 \Rightarrow 660=S*1{,}10$

$S=\frac{660}{1{,}10}=600 \Rightarrow$ *suma financiera en* 2022

1 Capital suma en 2022

$S=500 \quad n?$

$100(1+0{,}10*5)+200(1+0{,}10*3)+250=500(1+0{,}10*n)$

$150+260+250=500+50*n$

$660=500+50*n \Rightarrow 50*n=660-500=160$

$n=\frac{160}{50}=3{,}20$ *años*

vcmto. común $2023-3{,}2=2019{,}8$

2 Vcmto común para capital S=500

$S=100+200+250=550 \quad n?$

$100(1+0{,}10*5)+200(1+0{,}10*3)+250=550(1+0{,}10*n)$

$660=550(1+0{,}10*n)$

$660=550+55*n \Rightarrow 55*n=660-550=110$

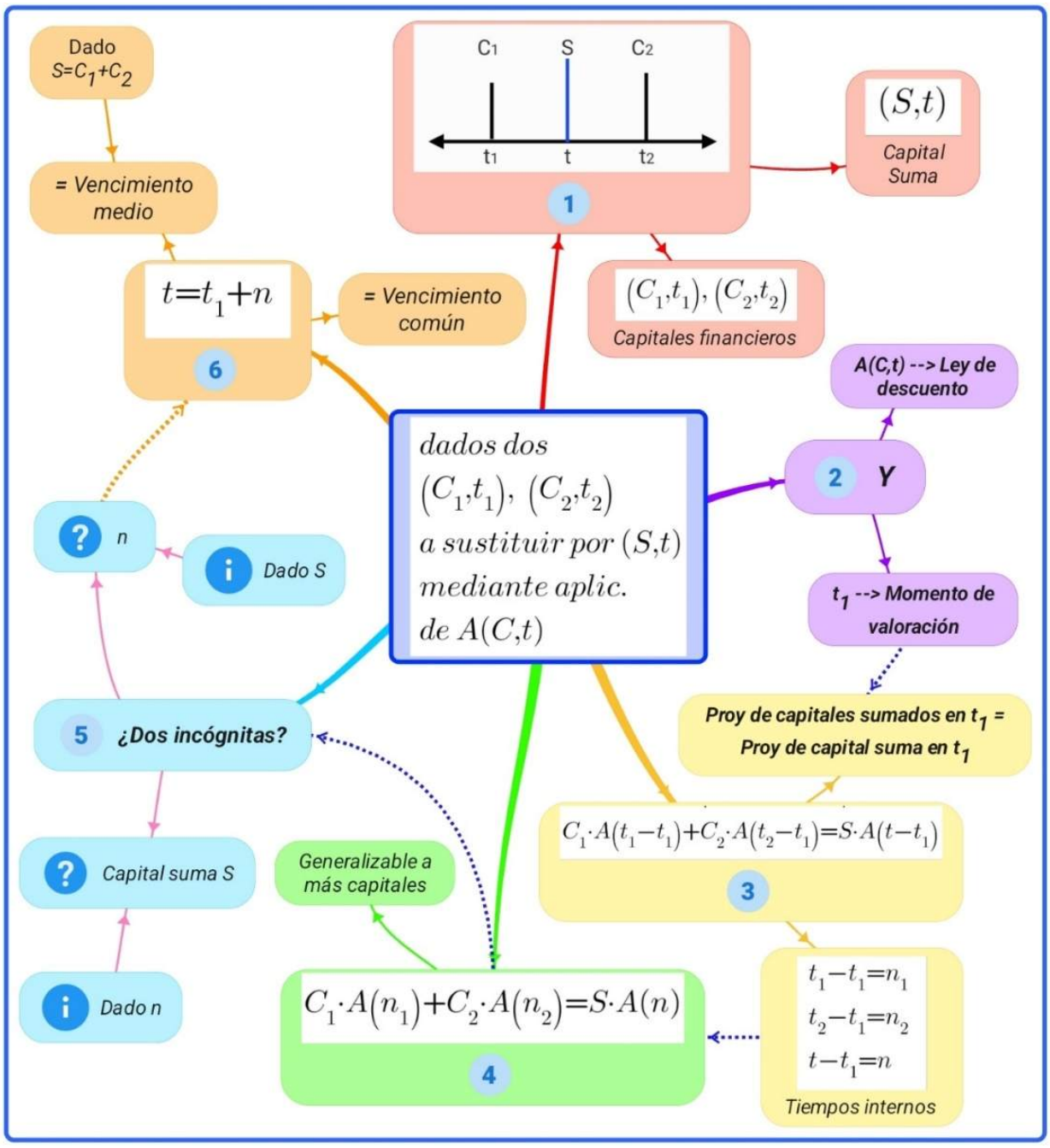
$n=\frac{110}{55}=2$ *años*

vcmto. medio $2023-2=2021$

3 Vencimiento medio

12 Suma con leyes de descuento

Al utilizar leyes de descuento se realiza la valoración tomando como referencia el vencimiento del primer capital, es decir, t_1.



(1) **Representación**. Trabajamos, igual que en el mapa anterior, con dos capitales los cuales queremos sustituir por un capital suma. En el gráfico de barras representamos los capitales a sumar (C_1,t_1) y (C_2,t_2), y el capital suma (S,t).

(2) **Momento**. Ahora utilizamos una ley de descuento A(C,t), por lo que los capitales se valoran en el vencimiento del primer capital. En el momento t_1.

(3) **Ecuación**. Establecemos la equivalencia financiera y calculamos los tiempos internos, para ello restamos de los respectivos vencimientos el vencimiento del primer capital, t_1.

(4) **Ecuación con los tiempos internos.** Expresamos la ecuación de equivalencia financiera con una ley de descuento y los tiempos internos calculados antes. Los respectivos capitales multiplicados por la ley unitaria de descuento son iguales al capital suma multiplicado por la misma ley.

(5) **Dos incógnitas.** En la ecuación anterior hay dos incógnitas:

- ✓ El capital suma (S), cuando conocemos su tiempo interno (n).
- ✓ El tiempo interno (n), cuando fijamos un capital suma (S). Un caso particular de este es el vencimiento medio (n) cuando el capital suma es $S=C_1+C_2$.

(6) **Vencimiento del capital suma**. Dado que el resultado (n) es el tiempo interno, para obtener el vencimiento del capital suma, en formato de fecha, hay que realizar la operación $t=t_1+n$. Es decir, sumar a la fecha de vencimiento del primer capital el valor de (n), que será el vencimiento medio cuando $S=C_1+C_2$.

Hasta aquí, hemos estudiado el concepto de suma financiera con leyes de capitalización y descuento genéricas. En los mapas (46), (47)

y (48) volveremos a tratar sobre su aplicación, una vez que hayamos visto las leyes financieras clásicas.

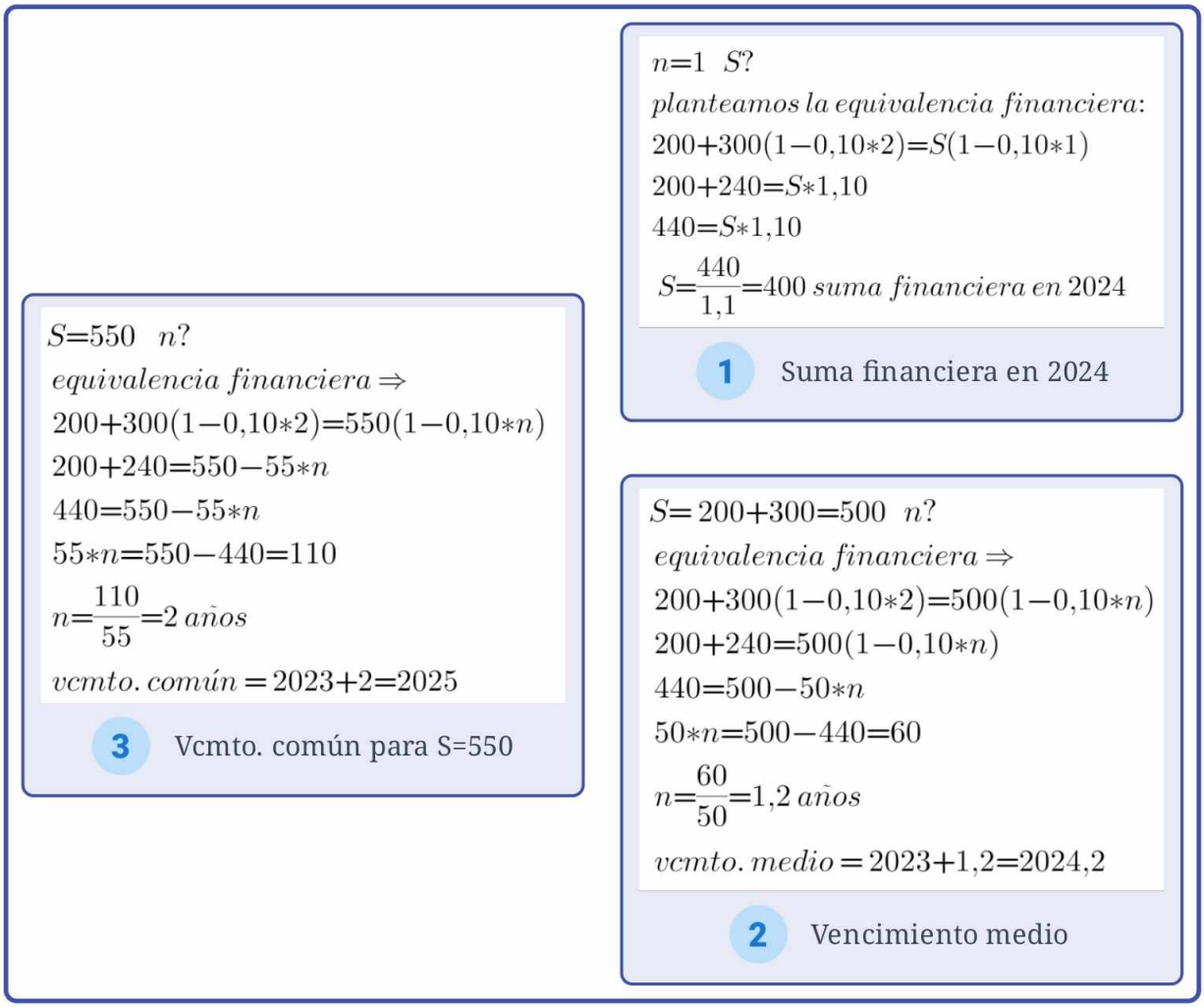
***

13 Ejemplo de suma con leyes de descuento

Dados los capitales financieros (200 €, 2023); (300 €, 2025) y la ley de descuento A(n)=1-0,10*n, calcula:

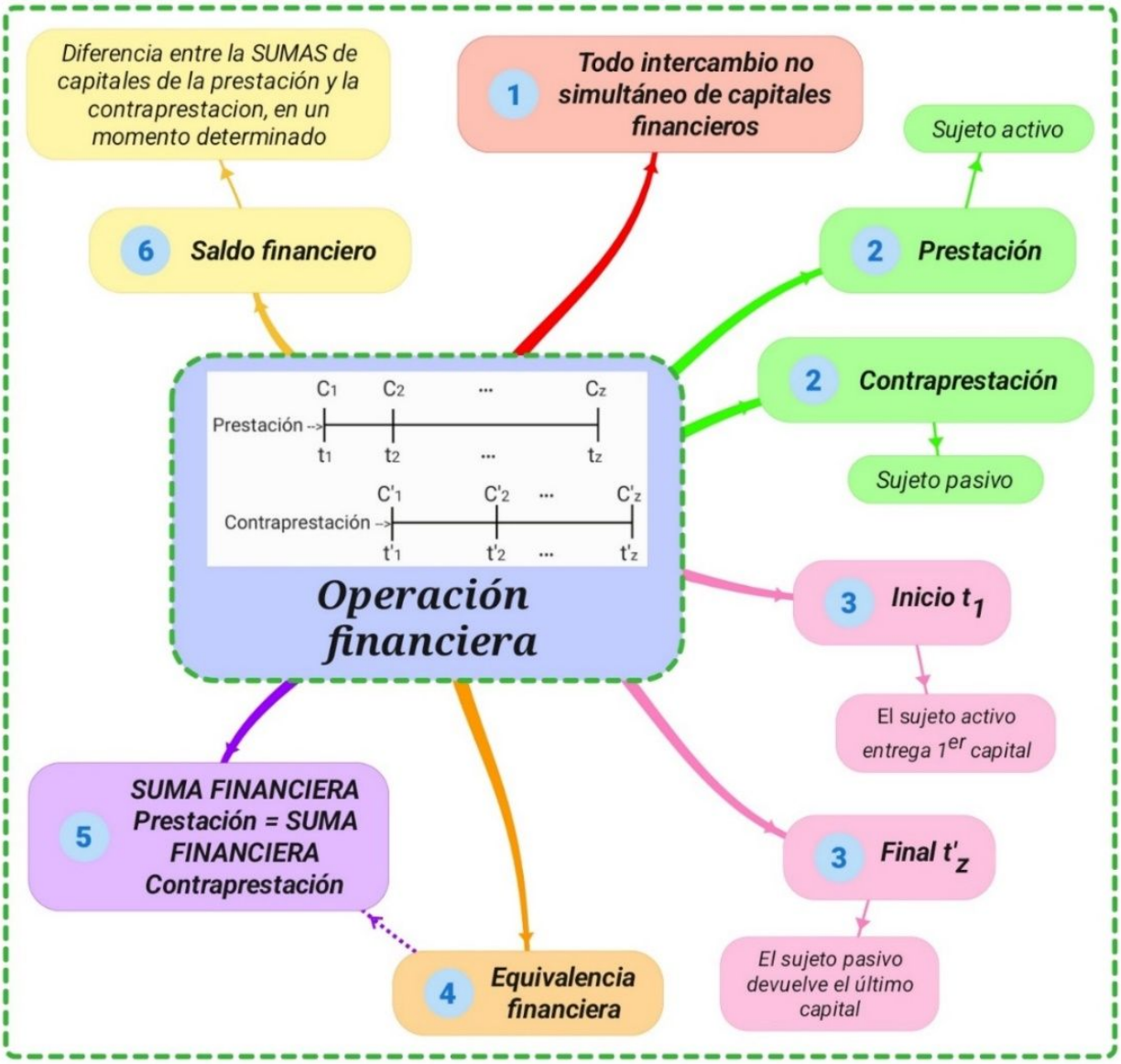
1. **El capital suma en el 2024.**
2. **El vencimiento medio.**
3. **El vencimiento común para un capital suma de 550 €.**

En este caso la ley indicada es de descuento, por lo que se fija como fecha de valoración el vencimiento del primer capital (2023).



14 Operación financiera

En primer lugar, trataremos de explicar el concepto de operación financiera para posteriormente realizar una clasificación de las mismas y analizar los elementos que las conforman.



Partimos de la imagen central, donde representamos una operación financiera compleja, es decir, de varios capitales. Sobre las dos líneas temporales figuran los capitales financieros, de la prestación y contraprestación respectivamente.

(1) **Definición**. Una operación financiera es el intercambio no simultáneo de varios capitales financieros entre los que se verifica la equivalencia financiera.

La condición de "no simultáneo" la diferencia de una operación al contado, en donde no interviene el tiempo.

(2) **Prestación y contraprestación**. Hay dos conjuntos de capitales, los de la prestación, entregados por el sujeto activo de la operación, y los de la contraprestación, entregados por el sujeto pasivo. Tanto en la prestación como en la contraprestación, dichos conjuntos pueden contener uno o varios capitales.

(3) **Inicio y final.** La operación se inicia en el momento t_1, cuando el sujeto activo entrega el primer capital, y termina el momento t_z, cuando el sujeto pasivo devuelve el último capital. Entre los dos momentos hay un diferimiento que llamamos duración, característica que la diferencia de una operación al contado, como comentamos antes.

(4) **Equivalencia financiera.** Tiene que verificarse la equivalencia financiera, comentada en (1).

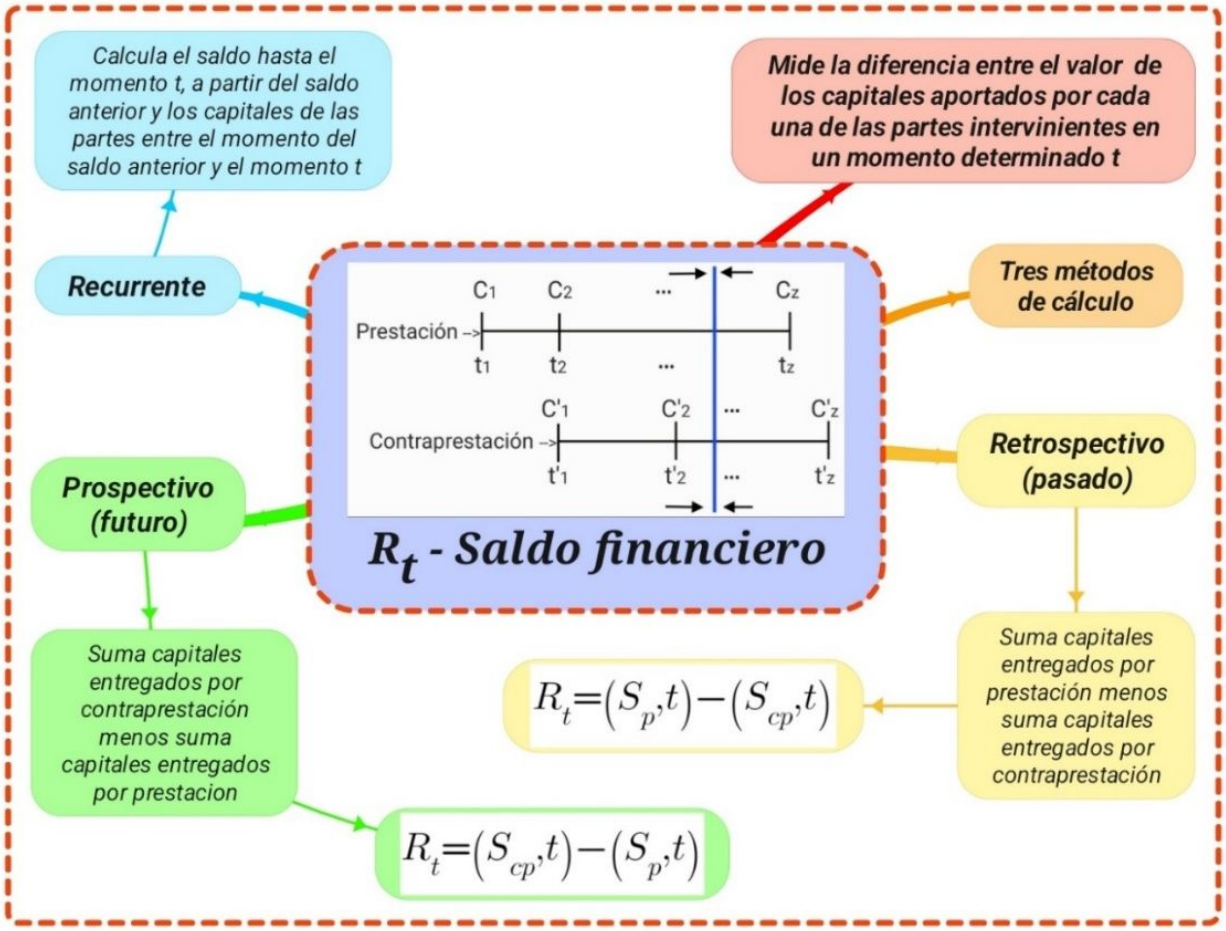
(5) **Suma financiera prestación=Suma financiera contraprestación**. Ha de cumplirse la igualdad indicada, consideranto todo el tiempo que dura la operación. Es la prueba de la equivalencia financiera.

(6) **Saldo financiero.** Se produce cuando en un momento determinado del tiempo interno de la operación valoramos los capitales aportados por cada una de las partes, y hay una diferencia a favor de uno los intervinientes.

En resumen, una operación financiera es el intercambio de varios capitales financieros equivalentes en distintos momentos temporales.

***

15 Saldo financiero



El saldo financiero mide la diferencia entre el valor de los capitales entregados por cada una de las partes en una operación financiera en un momento determinado (t).

Hay tres métodos para su cálculo:

- ✓ **Retrospectivo**: Diferencia entre la suma de los capitales entregados. R_t= Suma financiera de la prestación, menos suma financiera de la contraprestación.
- ✓ **Prospectivo**: Diferencia entre los capitales pendientes de entregar (futuros). R_t= Suma financiera de la contraprestación, menos suma financiera de la prestación.
- ✓ **Recurrente:** Se calcula el saldo de forma sucesiva hasta llegar al momento (t), o a partir del saldo de un momento

anterior y los capitales entregados por cada una de las partes entre el momento del saldo anterior y el momento (t)

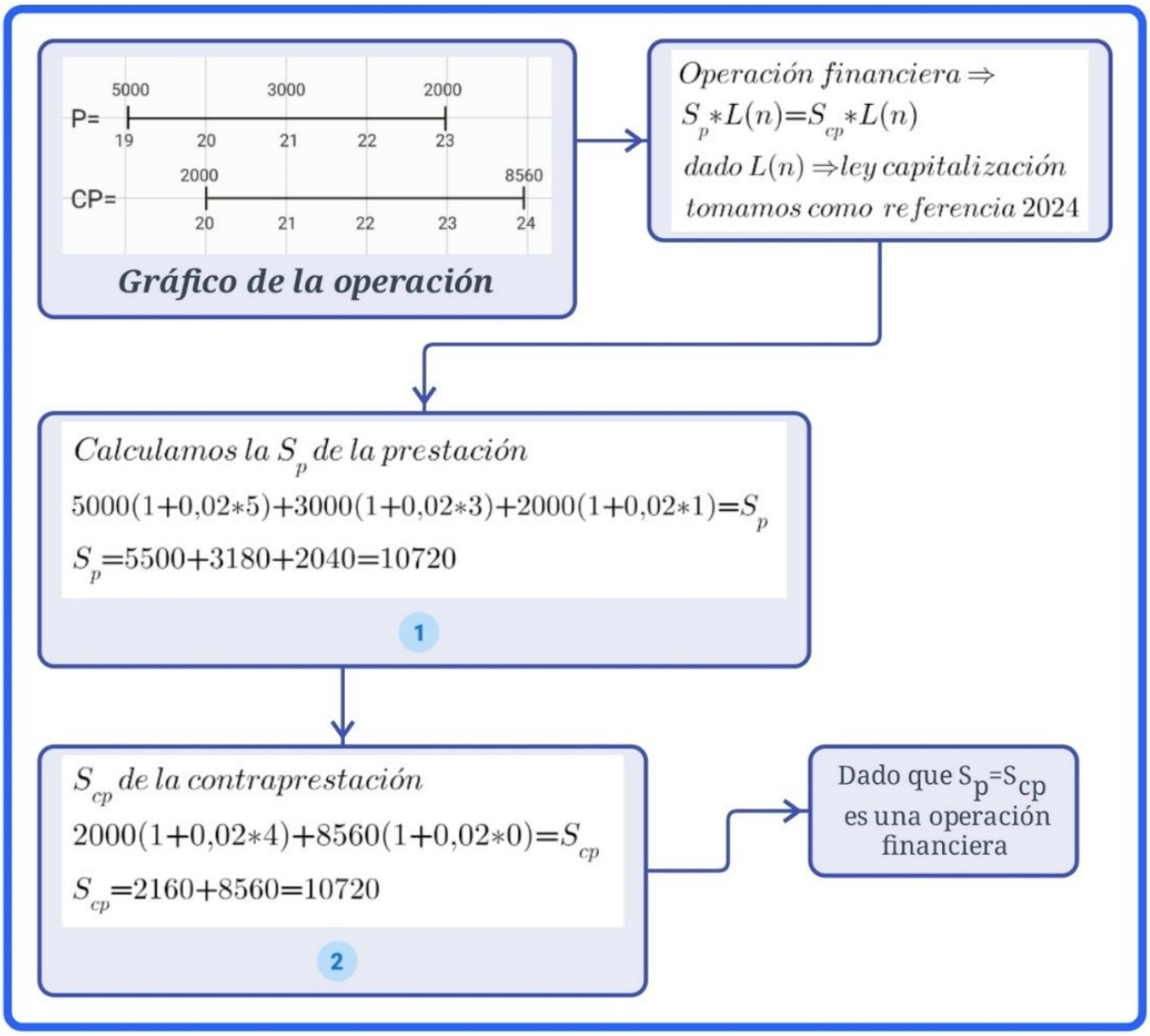
***

16 Cálculo del saldo financiero

Dada la siguiente operación financiera:
Prestación = [(5.000 €, 2019); (3.000 €, 2021); (2.000 €, 2023)].
Contraprestación= [(2.000 €, 2020); (8.560 €, 2024)].
Y la ley financiera L(n)=1+0,02*n.

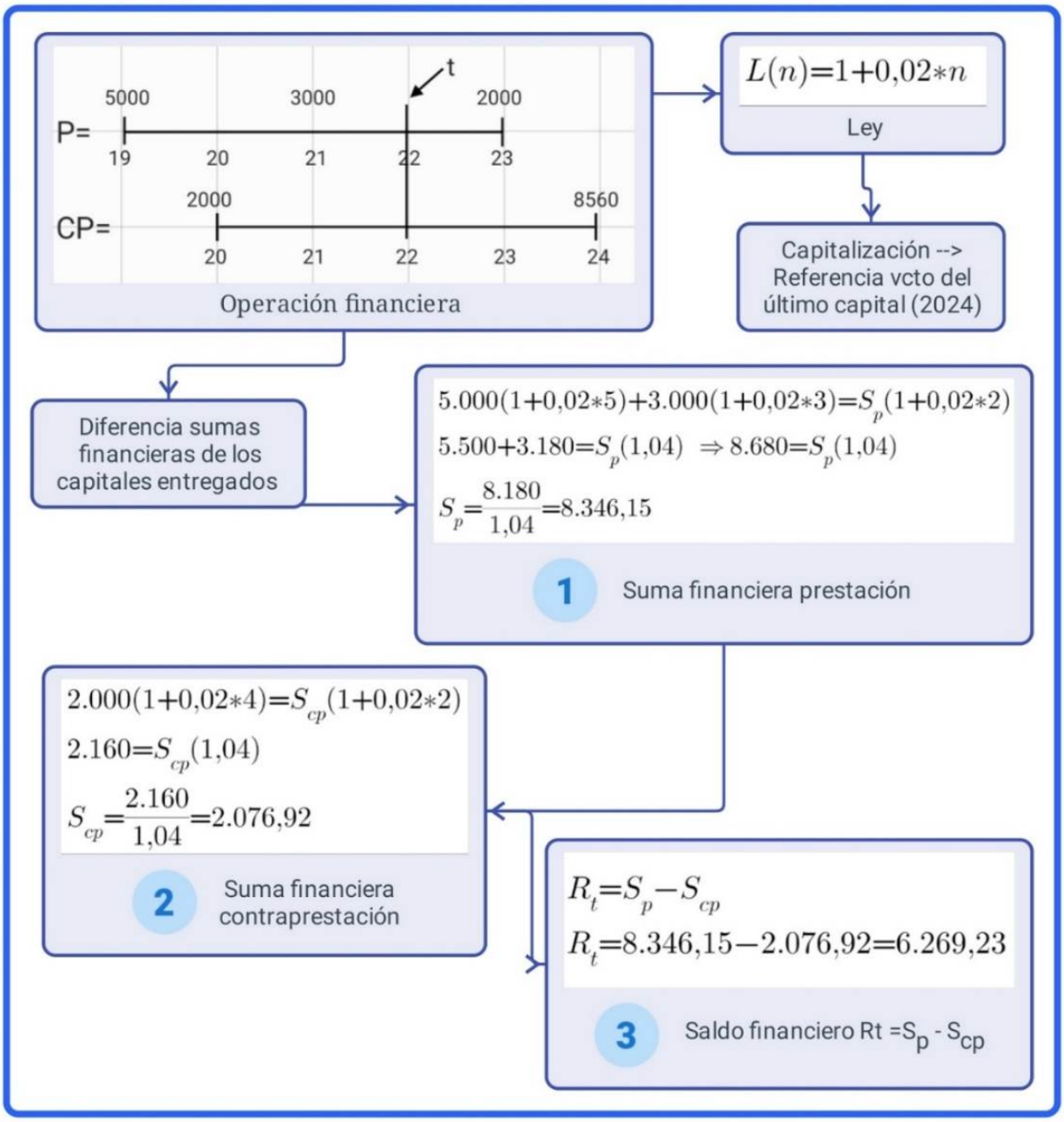
1. **Comprueba que es una operación financiera.**
2. **Calcula el saldo financiero en el año 2022 por los métodos retrospectivo y prospectivo.**

Empezamos con la verificación de operación financiera.



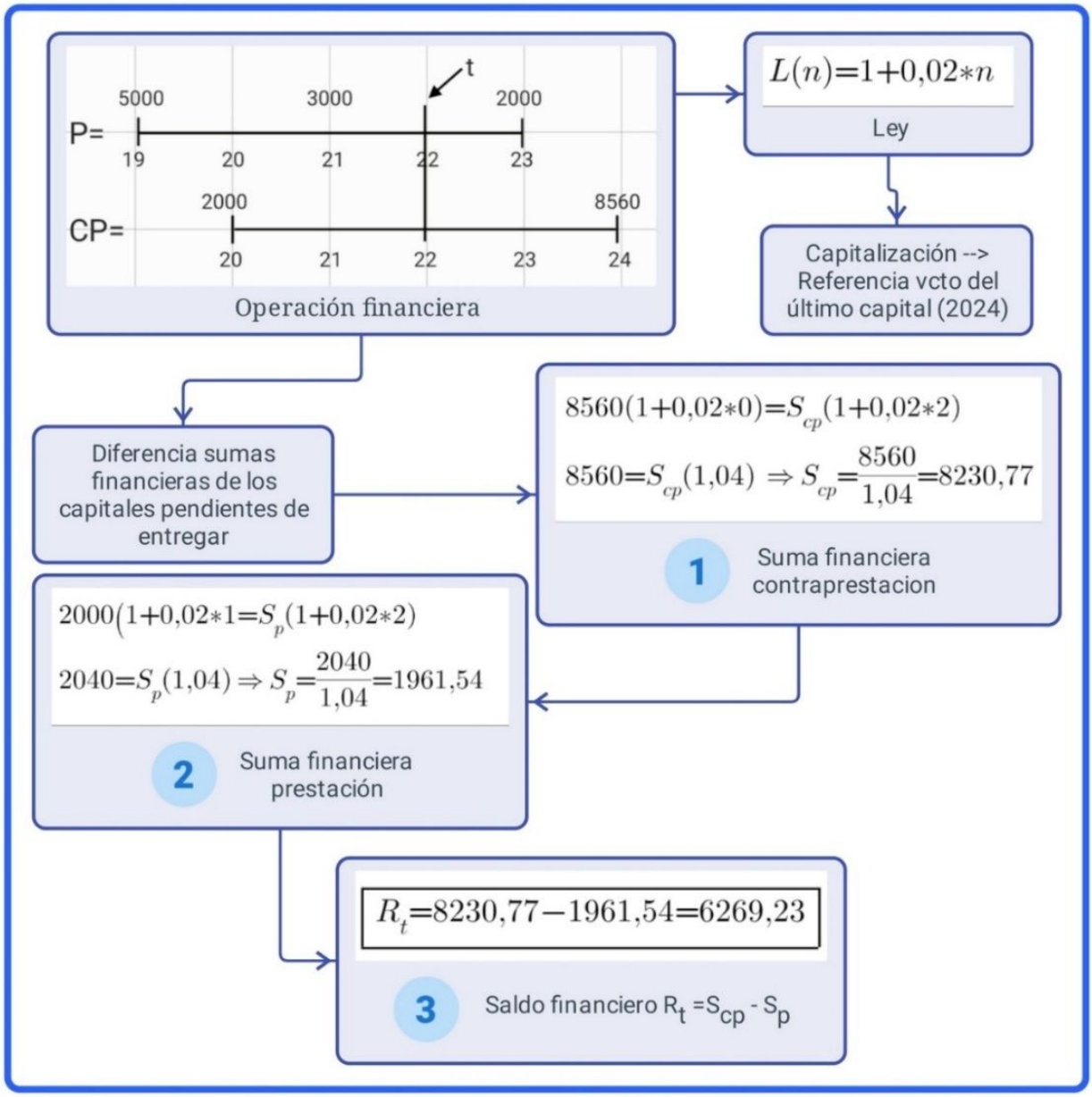
Continuamos con el cálculo del saldo financiero por el método retrospectivo.

El saldo financiero es la suma financiera de la prestación menos la suma financiera de la contraprestación.



Y para finalizar, calculamos el saldo con el método prospectivo.

En este caso, el saldo es la suma financiera de la contraprestación menos la suma financiera de la prestación.



Como podemos comprobar, ambos métodos dan el mismo resultado.

***

17 Elementos de una operación financiera

Una operación financiera contiene los siguientes elementos:

(1) **Equivalencia financiera.** Ha de cumplirse la igualdad: Suma financiera de la prestación = Suma financiera de la contraprestación. Es fundamental para que los capitales puedan intercambiarse y den origen a una operación financiera.

(2) **Temporales**. Toda operación tiene un origen, una duración y un final, que es la fecha de vencimiento de la misma. El tiempo

siempre interviene en una operación financiera, dado que es uno de los parámetros del capital financiero (C,t).

(3) **Objetivos**. Son los parámetros que contiene la expresión matemática de la ley financiera, es decir: los capitales, el tipo de interés y el tiempo. Son los argumentos de una operación financiera.

(4) **Personales**. En toda operación interviene al menos un acreedor (sujeto activo), persona que presta el capital, y un deudor (sujeto pasivo), persona que recibe el capital prestado y que paga al acreedor los intereses en compensación por la renuncia al disfrute de su capital en el momento presente. También puede haber un acreedor y varios deudores y viceversa.

Como veremos en los ejemplos, en el planteamiento de los problemas financieros siempre interviene algún elemento personal.

***

18 Clasificación de las operaciones financieras

La clasificación de las operaciones financieras se realiza a partir de determinados criterios. Seleccionamos los siguientes:

(1) Número de capitales:

- ✓ Simples, cuando la prestación y la contraprestación, ambas están formadas por un solo capital.
- ✓ Complejas, la prestación o la contraprestación están formadas por varios capitales.

Son ejemplos, de operación simple, un depósito a plazo que se cobra al vencimiento el capital más los intereses y de operación compleja el cobro de una renta.

(2) **Destino**. En operaciones de inversión o de financiación. En el caso de un particular, son ejemplos de inversión, la compra de bonos o un depósito a plazo, y de financiación, un préstamo para la compra de un coche.

(3) **Certeza**. Ciertas, cuando el capital y el vencimiento son conocidos y seguros, y aleatorias cuando el capital o el vencimiento son inciertos. Por ejemplo, los depósitos a plazo son seguros y las inversiones en bolsa inciertas.

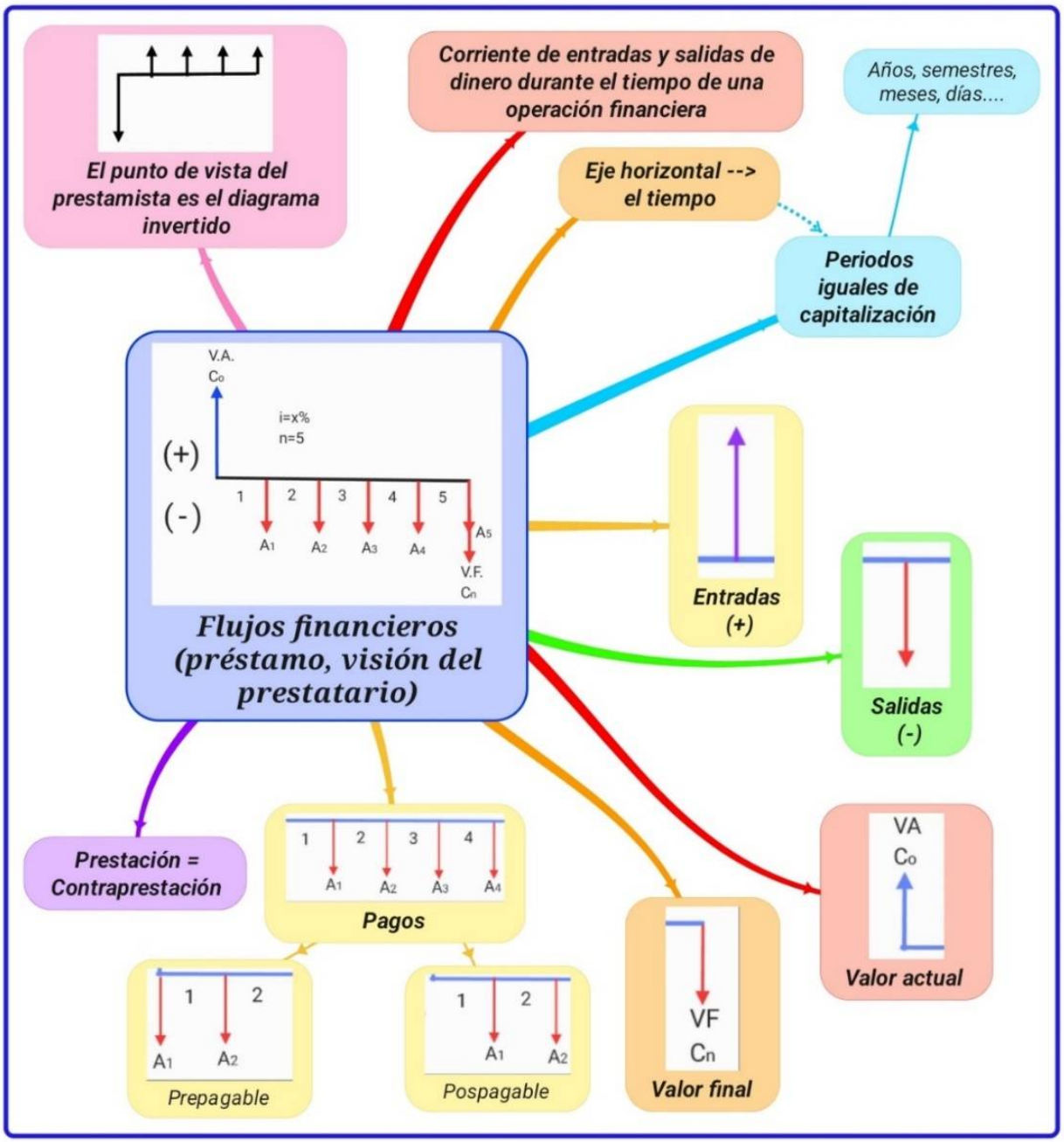
(4) **Duración**. A corto plazo, hasta el plazo un año, y a largo plazo las superiores a un año.

(5) **Momento de valoración**. Operaciones de capitalización (valoradas a su vencimiento) y de descuento (valoradas al inicio de la operación). Recordemos el mapa (5). En la capitalización proyectamos un capital hacia la derecha, en la línea temporal (vencimiento) y en descuento hacia la izquierda (momento inicial).

***

19 Diagramas de flujos financieros

Los diagramas de flujos financieros, también llamados de flujos de caja, son representaciones gráficas de las corrientes de cobros y pagos secuenciales realizadas durante una operación financiera.



Aportan una imagen intuitiva de la operación que facilita su comprensión y cálculo posterior. Por esta razón, suelen utilizarse como apoyo en la resolución de problemas con calculadora financiera y con Excel. Los utilizaremos en los ejemplos de este libro.

Para su explicación, en el mapa, utilizamos el diagrama que representa una operación de préstamo desde el punto de vista del prestatario.

En el eje horizontal de diagrama, se muestra el tiempo en períodos iguales de capitalización, como años, semestres, trimestres, meses, días, etc.

Las entradas de dinero (cobros) se indican con flechas apuntando hacia arriba, mientras que las salidas (pagos) con flechas apuntando hacia abajo. Las flechas parten de su momento temporal. En el mapa número (1), que trata sobre el concepto de capital financiero (C,t), ya se menciona la opción de considerar las cuantías (C) positivas cuando se trata de un cobro y negativas cuando es un pago. Esto es lo que muestran los diagramas de flujos financieros.

Pero además, la flecha del extremo izquierdo, si apunta hacia arriba, puede representar:

- ✓ Una entrada inicial de dinero C_0, por ejemplo un préstamo recibido, o
- ✓ El valor actual (VA) de una corriente de pagos futuros.

La misma flecha, apuntando hacia abajo, representa:

- ✓ Una entrega inicial de dinero C_0, por ejemplo un depósito en el banco que realiza un depositante, o
- ✓ El valor actual (VA) de una serie de cobros a recibir en el futuro.

La flecha en el extremo derecho del diagrama, si apunta hacia arriba:

- ✓ El cobro a su vencimiento C_n de un depósito o de un préstamo (punto de vista del prestamista), o
- ✓ El valor final (VF) de una serie de pagos anteriores.

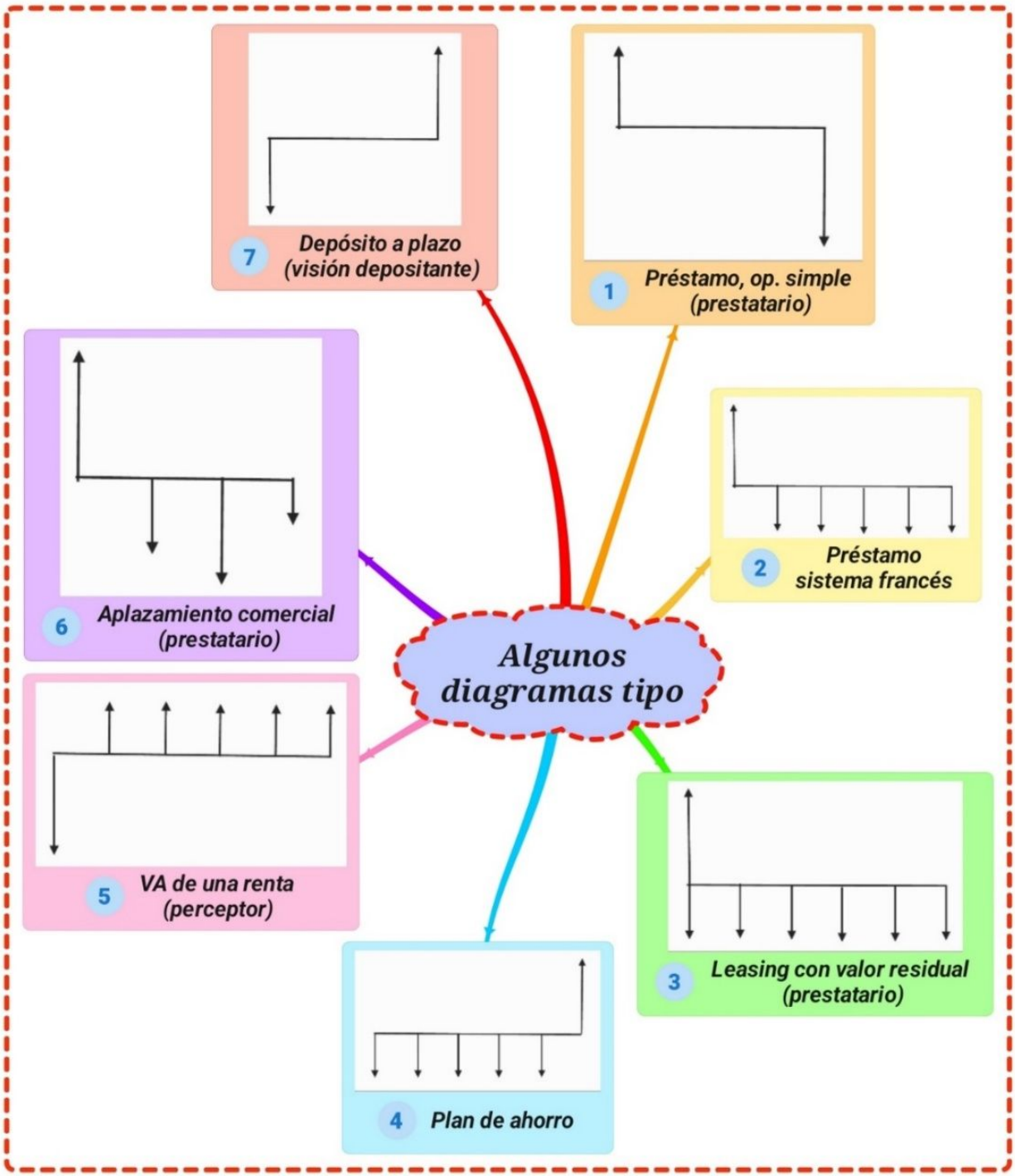
La misma flecha, apuntando hacia abajo:

- ✓ El pago final C_n de un préstamo (punto de vista prestatario), o
- ✓ El valor final (VF) de una corriente de cobros anteriores.

Los pagos intermedios, también llamados anualidades (A), si apuntan hacia abajo son salidas de dinero y hacia arriba entradas. Cuando la flecha sale desde el inicio del período, entonces son prepagables o anticipados y si sale desde el final del período son pospagables o vencidos.

***

20 Algunos ejemplos de diagramas tipo



Recordamos que las flechas hacia arriba son cobros y las orientadas hacia abajo pagos. La primera flecha de la izquierda también puede representar el valor actual (VA) de una serie de pagos

o cobros posteriores. Y la última de la derecha el valor final (VF) de una serie de pagos o cobros anteriores.

(1) **Préstamo**. Representa un préstamo simple desde el punto de vista del prestatario que recibe el importe C_o y lo devuelve a su vencimiento junto con los intereses, el montante C_n. Se trata de una operación simple, porque tanto la prestación como la contraprestación solo constan de un capital.

(2) **Préstamo sistema francés**. También desde el punto de vista del prestatario. Este recibe el importe del préstamo y lo cancela mediante una serie de cuotas periódicas e iguales que incluyen la amortización y los intereses correspondientes. Es una operación compleja, está formada por varios capitales.

(3) **Leasing**. Se trata de un contrato de arrendamiento financiero, con pagos anticipados, debido a que se realizan al comienzo del período. Las cuotas son todas iguales y la última es el valor residual (compra del bien por el prestatario), en este caso del mismo importe que las cuotas. Operación compleja.

(4) **Plan de ahorro**. Con aportaciones periódicas iguales, cobrando el importe junto con los rendimientos al final de la operación (VF). Operación compleja.

(5) **Renta.** La flecha inicial hacia abajo, en este caso representa el valor actual (VA) de una serie de cobros futuros desde el punto de vista del perceptor. Por ejemplo, un alquiler, una pensión, etc. Suponiendo que se pudiera comercializar el (VA) sería el importe que estaría dispuesto a entregar por los derechos de cobro indicados futuros.

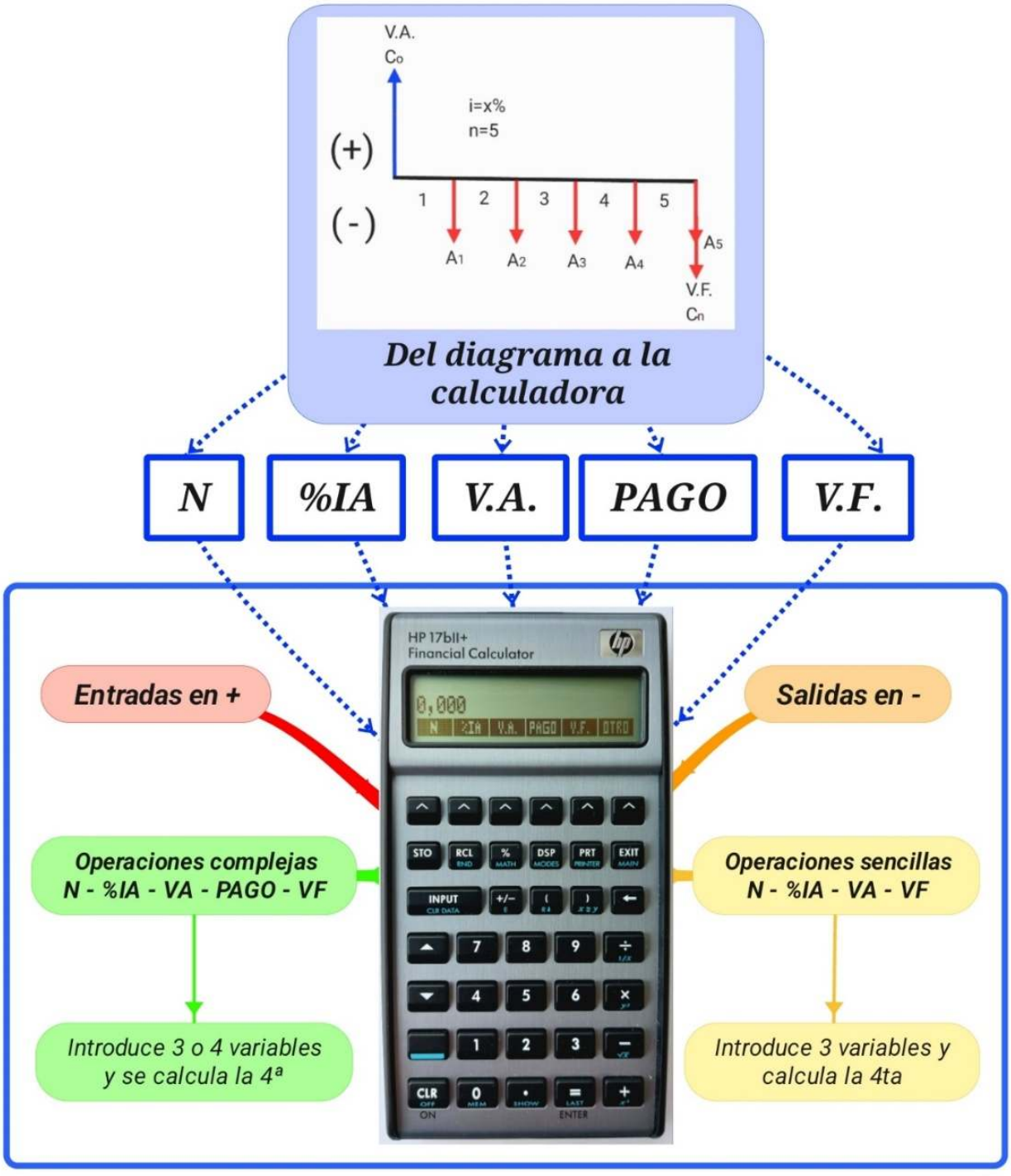
(6) **Aplazamiento comercial**. La flecha de la izquierda indica el importe de la financiación recibida y las flechas hacia abajo los pagos

necesarios para su devolución. En este caso los pagos son de importes distintos.

(7) **Depósito a plazo**. Es una operación simple de depósito a plazo desde la visión del depositante. La flecha hacia abajo es el capital inicial C_o entregado al banco, y la flecha hacia arriba el capital final o montante C_n= capital inicial más intereses.

***

21 Del diagrama a la calculadora y a Excel



La representación gráfica mediante diagramas encaja perfectamente con los menús de las calculadoras financieras y con Excel.

En este libro usaremos la calculadora HP 17bII+, principalmente para las funciones del menú VDT (en español) o TVM (en inglés), que calcula el valor del dinero en el tiempo utilizando la ley de capitalización compuesta que estudiaremos en el mapa (26).

Estas funciones son similares en otras calculadoras financieras. El estándar de este menú fue popularizado con la calculadora HP 12 C, creada en 1981 y que todavía sigue en el mercado.

Otras calculadoras destacadas son la TI BA II Plus, la HP 10b y la Casio FC 200.

Previamente, antes de introducir datos en la calculadora HP, es conveniente borrar los registros anteriores con los siguientes pasos: FIN VDT CLR DATA.

A continuación configuramos el menú VDT con el número de pagos por año o periodos de capitalización, FIN VDT OTRO P.AÑO, y el modo de pago de las anualidades (si hay) con FIN VDT OTRO FIN o INIC.

Las operaciones representadas en el diagrama de flujo se introducen utilizando las cinco teclas del menú VDT: **(N - %IA - V.A. - PAGO -V.F.)** donde:

- ✓ **N:** Para la introducción (o cálculo) del número total de pagos o períodos de capitalización.
- ✓ **%IA:** Para la introducción (o cálculo) del tipo de interés nominal anual en tanto por ciento.
- ✓ **V.A.:** Para la introducción (o cálculo) del valor actual o descuento de una serie de flujos de caja (pagos + V.F.). En positivo si es un cobro y negativo si es un pago.
- ✓ **PAGO:** (O PMT en inglés), → Para introducir (o cálculo) de los pagos periódicos, todos iguales. Si es un cobro en positivo y si es un pago en negativo.
- ✓ **V.F.**: Para introducir (o cálculo) del valor futuro o montante al final del período. Si es un cobro en positivo y si es un pago en negativo.

Las variables N y %IA, se utilizan en todas las operaciones y el resto depende del tipo de operación. En las simples suelen usarse (N - %IA – VA – VF) y en las complejas las cinco variables comentadas.

La operativa es introducir el valor de las variables conocidas y preguntar a la calculadora, pulsando la tecla correspondiente, el valor de la incógnita.

Esta pequeña explicación no pretende sustituir manual de la calculadora indicado en la bibliografía al final del libro, recomendando consultarlo para profundizar en su funcionamiento y configuración.

Excel también utiliza las funciones del valor del dinero en el tiempo mediante capitalización compuesta y son las siguientes:

- ✓ **Tasa:** Tipo de interés nominal en tanto por uno. En caso de interés fraccionado se introduce el nominal entre el número de fracciones del año (m). Cuando la celda asignada está en formato porcentaje puede introducirse en tanto por ciento.
- ✓ **Nper:** Número de períodos que dura la operación.
- ✓ **Pago:** Importe de las anualidades constantes.
- ✓ **Va**: Valor actual.
- ✓ **Vf:** Valor fututo.
- ✓ **Tipo:** Forma de pago de la anualidad, introduciendo (0) para pospagable y (1) para prepagable.

Las diferencias entre Excel y la calculadora es que en Excel el tipo de interés se introduce en tantos por uno (excepto que pongamos la celda correspondiente en formato porcentaje como ya comentamos) y en la calculadora en tanto por ciento.

Otra diferencia es la introducción de la forma de pago de las anualidades. En Excel se indica con el parámetro Tipo (0 para pospagable, o 1 para prepagable). En la calculadora se indica con los pasos: FIN VDT OTRO FIN (pospagable) INIC (prepagable). Esto lo veremos con más detalle en los mapas que tratan sobre rentas.

En los ejemplos se indicarán las teclas a utilizar en el caso de la calculadora, y el nombre de la función y los argumentos a introducir en el caso de Excel. Es recomendable usar la calculadora financiera y Excel a la vez que se estudia y practican las soluciones algebraicas.

Si el lector no dispone de Excel, también puede utilizar Google Sheets, Calc o cualquier programa o aplicación similar a Excel.

En el blog Economía Excel, se puede descargar una calculadora para los ejemplos prácticos de este libro.

Continuaremos con el uso de la calculadora y con Excel en el mapa (29) y siguientes.

***

BLOQUE SEGUNDO – LEYES FINANCIERAS CLÁSICAS

Si quieres conocer el valor del dinero, anda y prueba a tomarlo en préstamo.

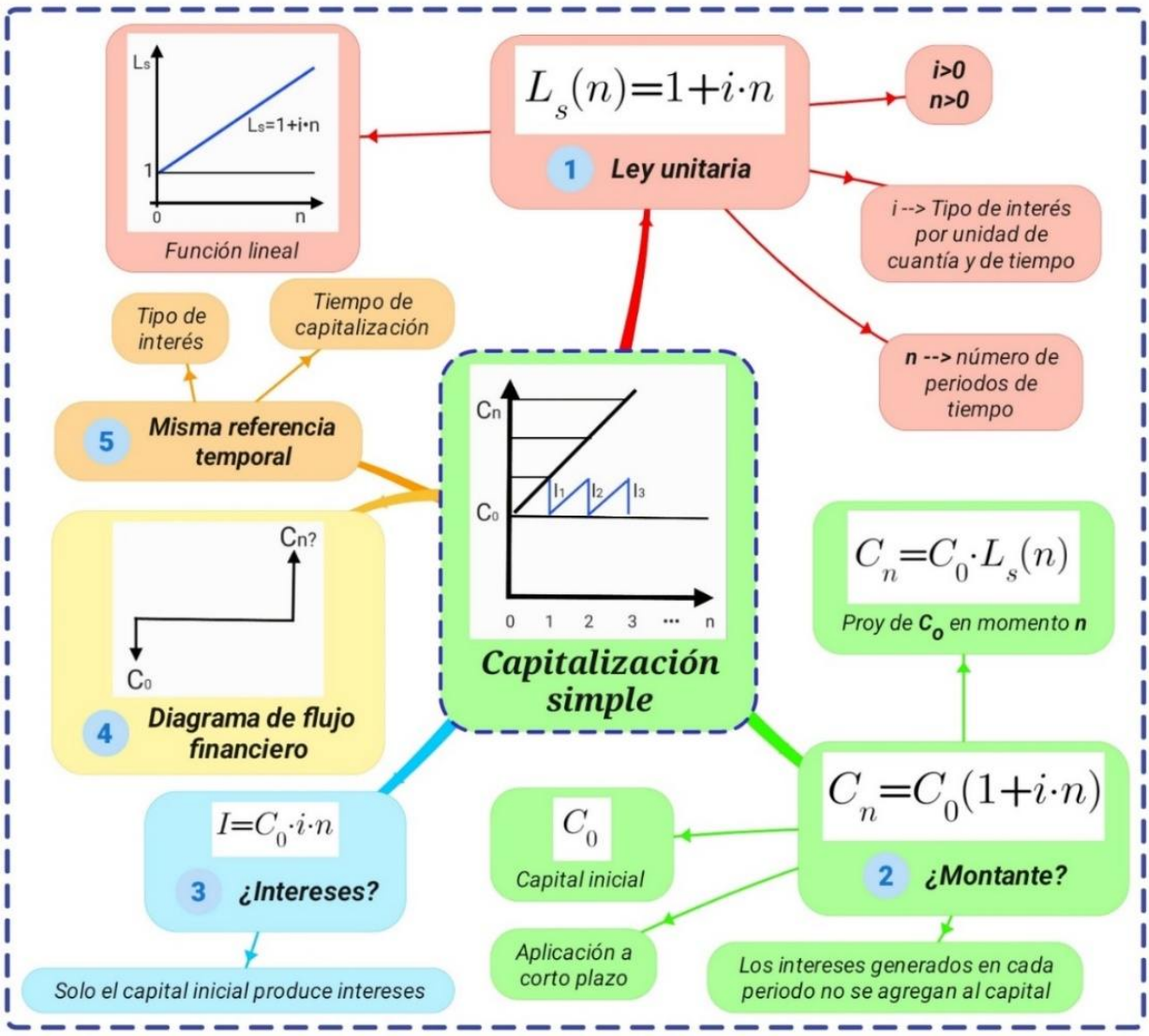
BENJAMIN FRANKLIN

No pongas tu interés en el dinero, pero pon tu dinero a interés.

OLIVER W. HOLMES

22 Ley de capitalización simple

Partimos de la imagen central del mapa. En el eje vertical se indican los capitales y en el horizontal el tiempo. En esta ley los intereses generados no se agregan al capital para el período siguiente, por lo que se calculan siempre sobre el capital inicial y tienen la misma cuantía en cada subperíodo que dura la operación.



El capital final C_n es igual al inicial C_0 más los intereses calculados de la forma indicada.

(1) **Ley unitaria.** Para facilitar las explicaciones en los puntos siguientes expresamos la ley en su forma unitaria, donde el capital inicial es una unidad monetaria (teniendo en cuenta la propiedad de proporcionalidad de capitales), $L(n)=1+i*n$, y donde:

- ✓ $i>0$, es el tipo de interés (el precio del dinero) por unidad de cuantía y de tiempo, en tanto por uno.
- ✓ $n>0$ es el número de períodos de tiempo.
- ✓ Y la representación gráfica es una función lineal con pendiente positiva.

(2) **Montante**. Al multiplicar la ley unitaria $L(n)$ indicada, por el capital inicial C_0 obtenemos el montante o capital equivalente $C_n=C_0(1+i*n)$, que es la fórmula principal de la capitalización simple. Conocidos el capital inicial, el tiempo interno, en número de períodos, y el tipo de interés en tanto por uno, obtenemos el capital final o montante.

Como indicamos antes, en esta expresión matemática, los intereses generados en cada período no se añaden al capital para calcular los intereses de los períodos siguientes.

Esta ley suele utilizarse a corto plazo, hasta un año, no obstante, puede aplicarse a plazos superiores si lo acuerdan los sujetos intervinientes en una operación financiera.

(3) **Intereses.** Otra fórmula importante es la que calcula los intereses totales. Se obtienen multiplicando el capital inicial por el tipo de interés por número de períodos. El tipo de interés se expresa en tanto por uno, como ya indicamos, es decir, al $10\ \%$ le corresponde $0{,}10$.

Los intereses totales también se pueden calcular como la diferencia entre el montante y el capital inicial, $I=C_n-C_0$.

(4) **Diagrama.** Representa a una operación financiera simple, es decir, tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un solo capital. En este caso, el diagrama de flujo, indica que la primera flecha hacia abajo es la entrega del capital inicial C_0 y la

última hacia arriba el cobro del montante C_n a su vencimiento. La imagen corresponde a un depósito desde el punto de vista del depositante.

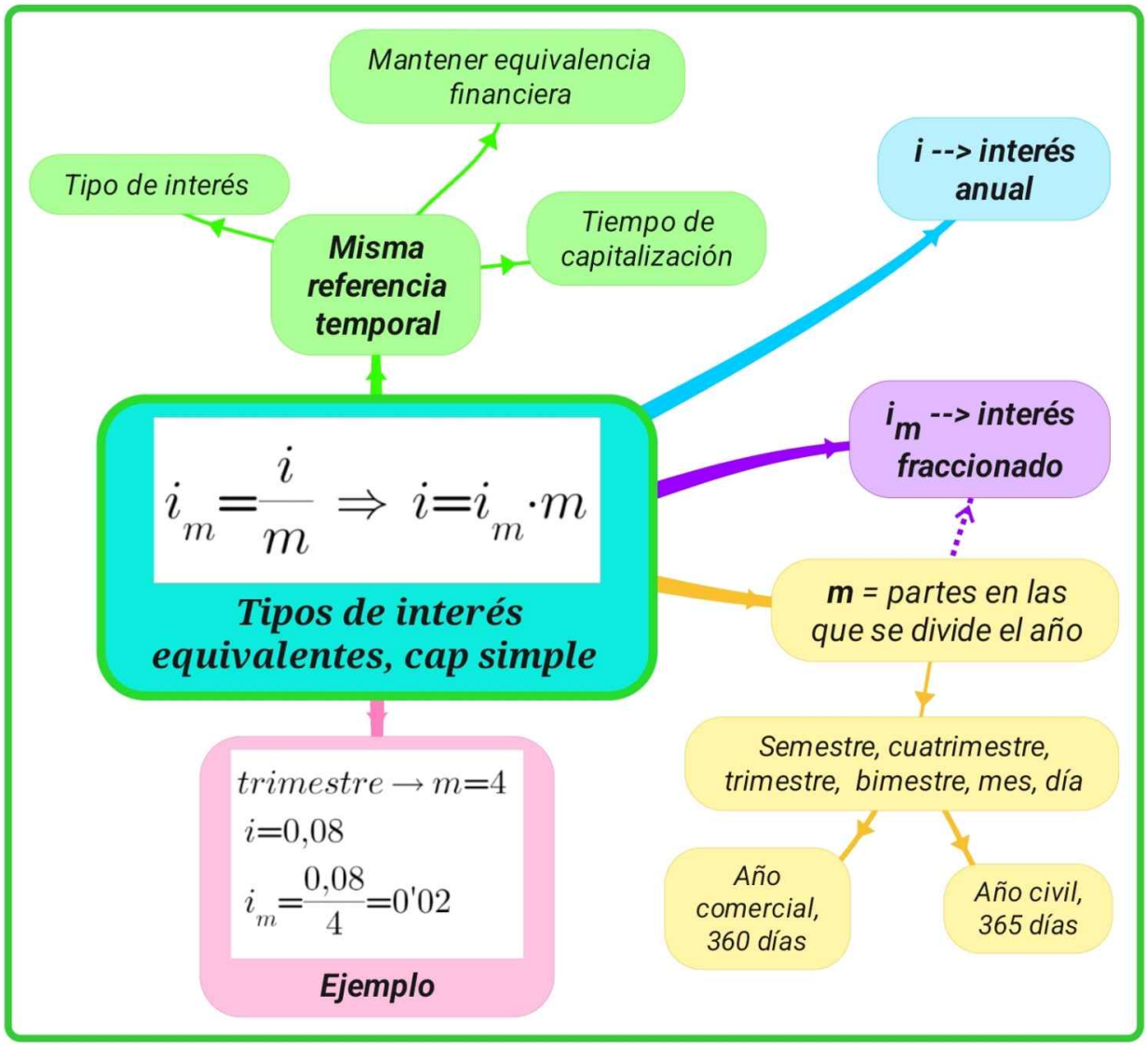
(5) **Misma referencia temporal.** El tipo de interés y el tiempo de capitalización han de estar expresados en la misma unidad temporal. Si el tipo de interés se expresa para períodos anuales y el tiempo de capitalización en una fracción del año, debemos transformar el tipo de interés anual en un interés fraccionado.

En el mapa siguiente veremos cómo se calculan los tipos de interés equivalentes.

Con las dos fórmulas indicadas en (2) y en (3) podemos resolver la mayoría de los problemas de capitalización simple. El procedimiento consiste en sustituir en la fórmula principal el valor numérico de las variables conocidas, despejar la variable desconocida y calcular su valor.

***

23 Tipos de interés equivalentes en capitalización simple



En la imagen central indicamos la equivalencia entre el tipo de interés anual y el fraccionado, en capitalización simple.

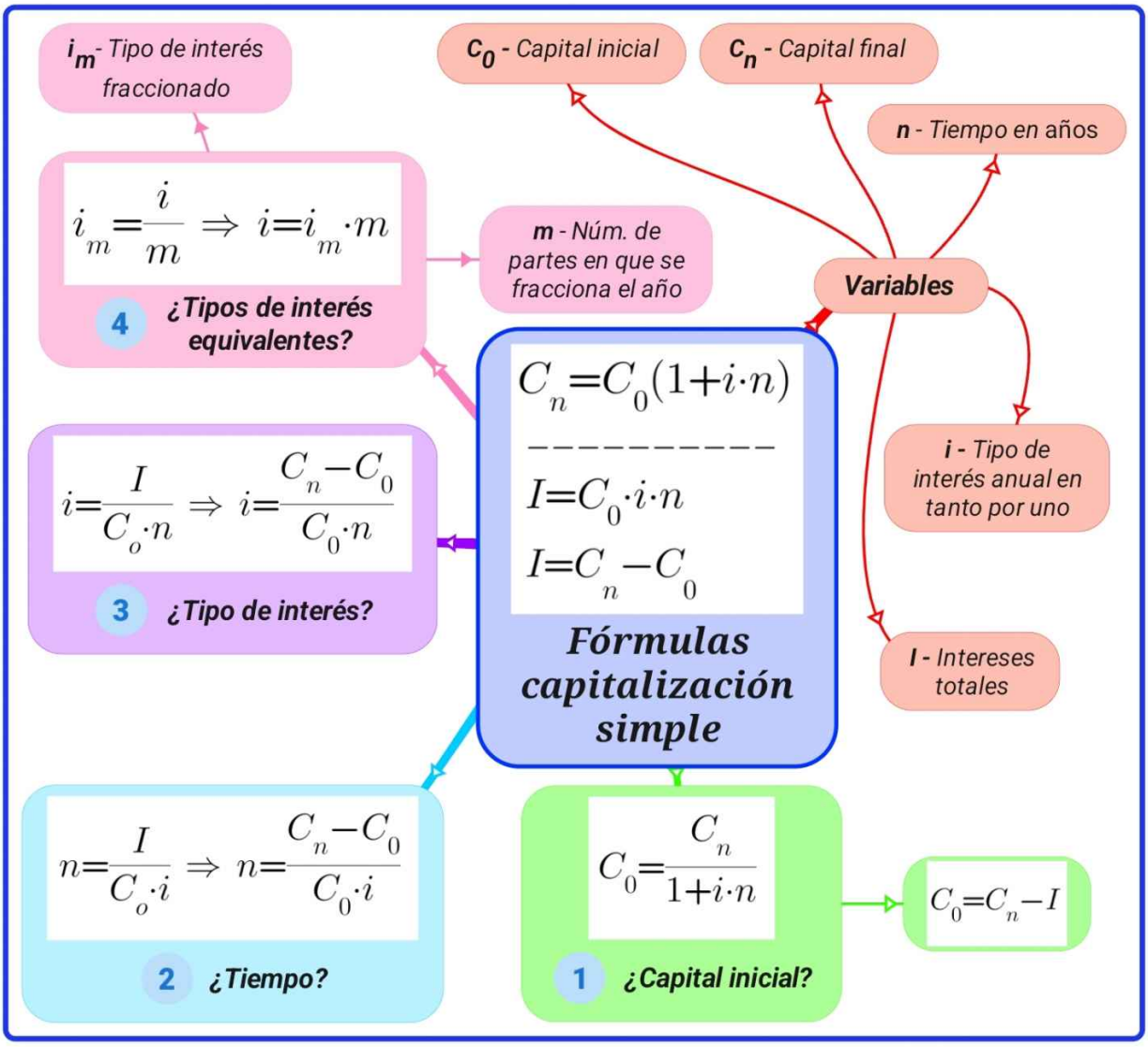
Esta conversión, como ya indicamos, es necesaria cuando en un problema el tipo de interés y el periodo de capitalización se expresan en una unidad temporal distinta.

El interés anual lo indicamos con (i) y el fraccionado con i_m. El fraccionado puede ser semestral, cuatrimestral, bimestral, mensual y diario, por citar las más usadas. En el caso de interés fraccionado diario, la convención es considerar al año comercial de 360 días (y los meses de 30) y al año civil de 365 o 366, en el caso de bisiesto.

El interés fraccionado es igual al parámetro (i) entre el número de veces que se fracciona el año (m). En capitalización simple, los tipos de interés fraccionados son proporcionales, porque al tratarse de una ley sumativa, los intereses de un período no se reinvierten para producir nuevos intereses en el período siguiente.

***

24 Fórmulas de capitalización simple



Para resolver problemas de capitalización simple es suficiente con recordar las dos fórmulas principales $C_n=C_0(1+i*n)$ e $I=C_0*i*n$, indicadas en el centro de este mapa, y que hemos estudiado en el mapa (22). Se procederá de la siguiente manera:

1.º Sustituir en la ecuación principal las tres variables conocidas que nos dará el enunciado.

2.º Despejar la cuarta, que será la incógnita.

3.º Realizar las operaciones para calcular su valor.

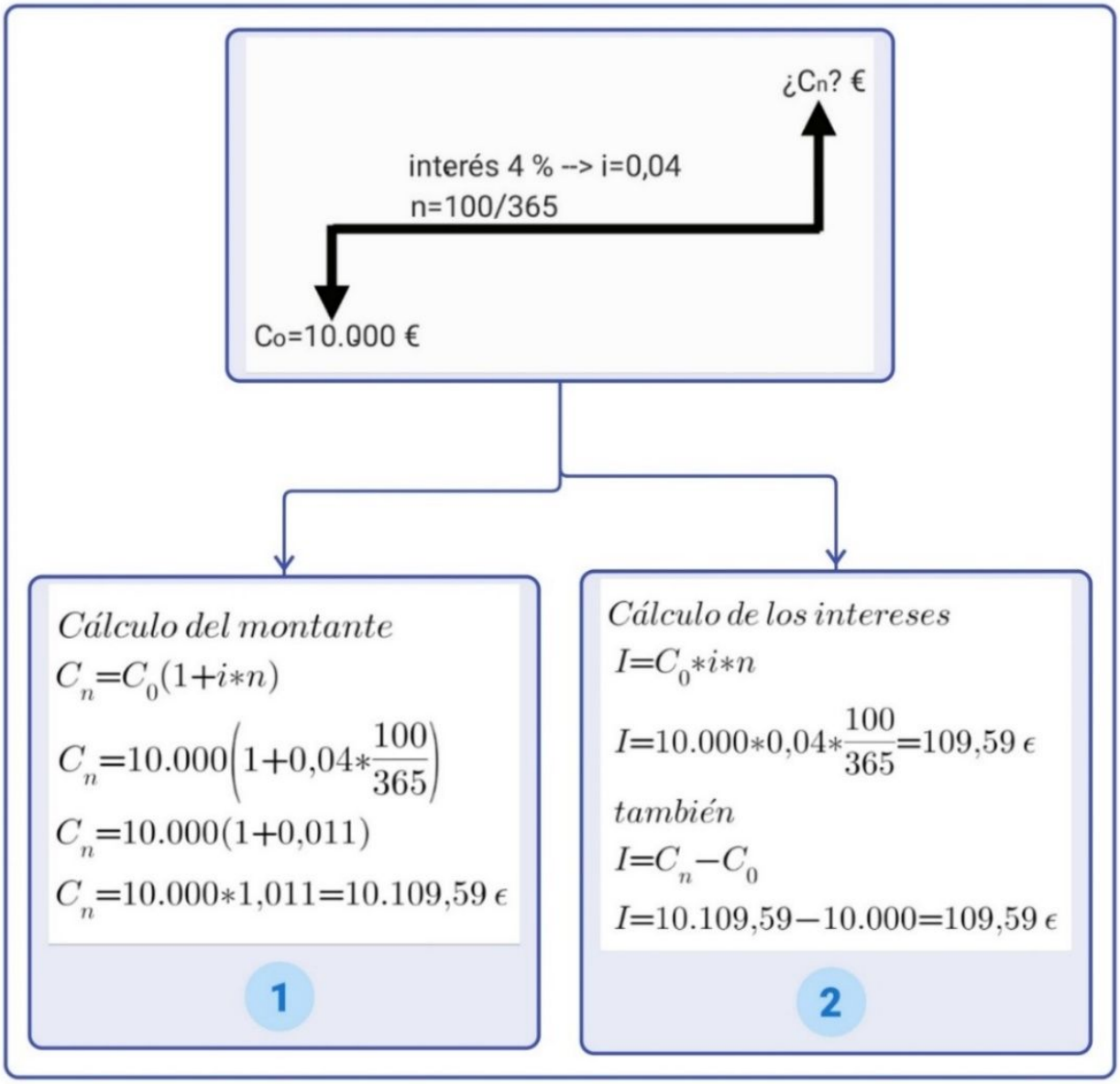
Esto es lo que haremos en los ejemplos de los capítulos siguientes. Puedes ver con mayor detalle los pasos generales para resolver problemas en el mapa (93).

Pero, como alternativa, se pueden utilizar las fórmulas indicadas en este mapa, en las que hemos despejado cada incógnita a partir de la fórmula del montante.

***

25 Ejemplos de aplicación capitalización simple

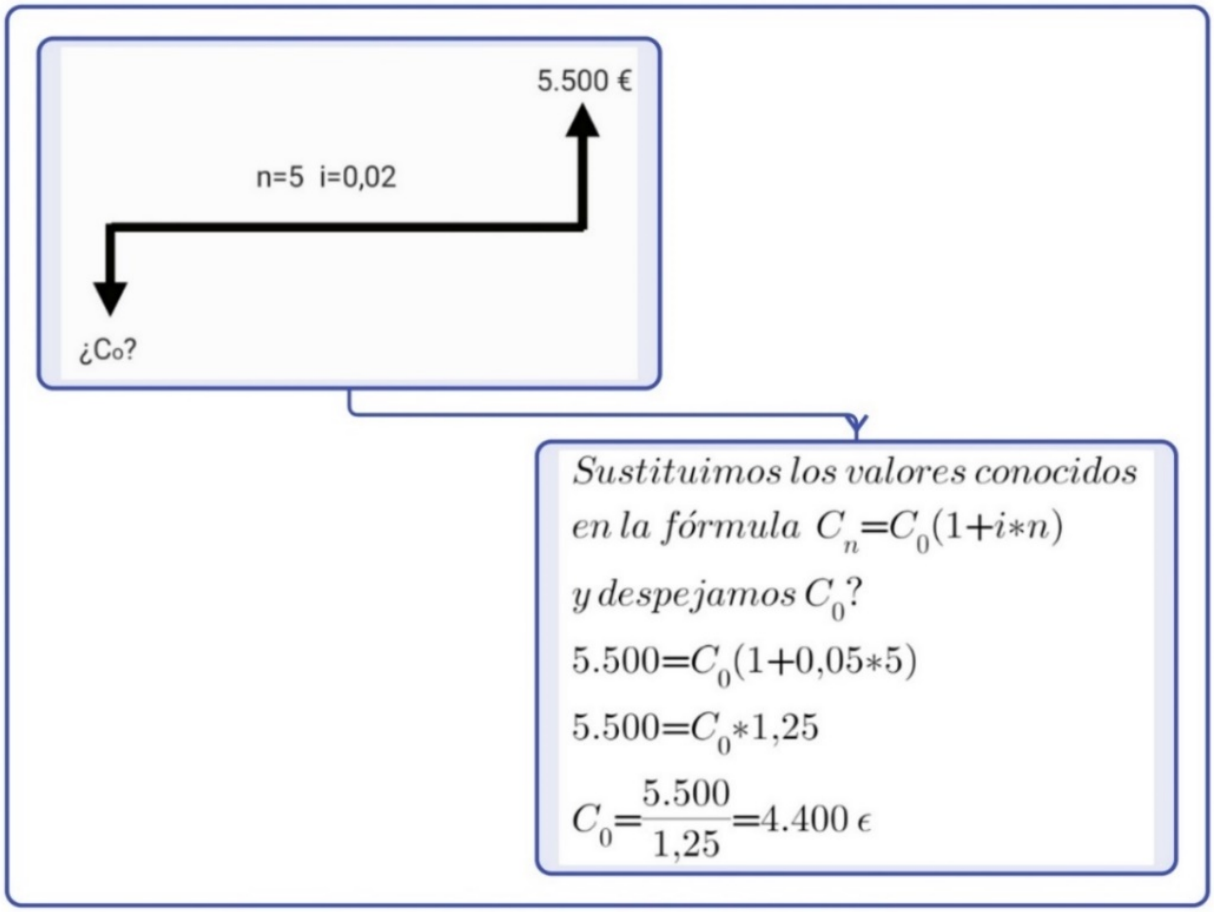
1.- Calcula el capital que obtendremos durante 100 días al depositar 10.000 € en un banco al 4 % de interés simple anual, y los intereses totales de la operación, utilizando como base del año civil.



A partir de ahora, en la resolución de los ejemplos vamos a utilizar los diagramas estudiados en los capítulos (19) y (20). Aportan una imagen intuitiva de la operación financiera, identificando las entradas

y salidas de dinero. Además, sobre el gráfico se indican los datos conocidos y la incógnita del problema con el signo de interrogación.

2.- ¿Qué capital se colocó al interés del 2 % anual simple durante cinco años, dado que proyectó un montante de 5.500 €?

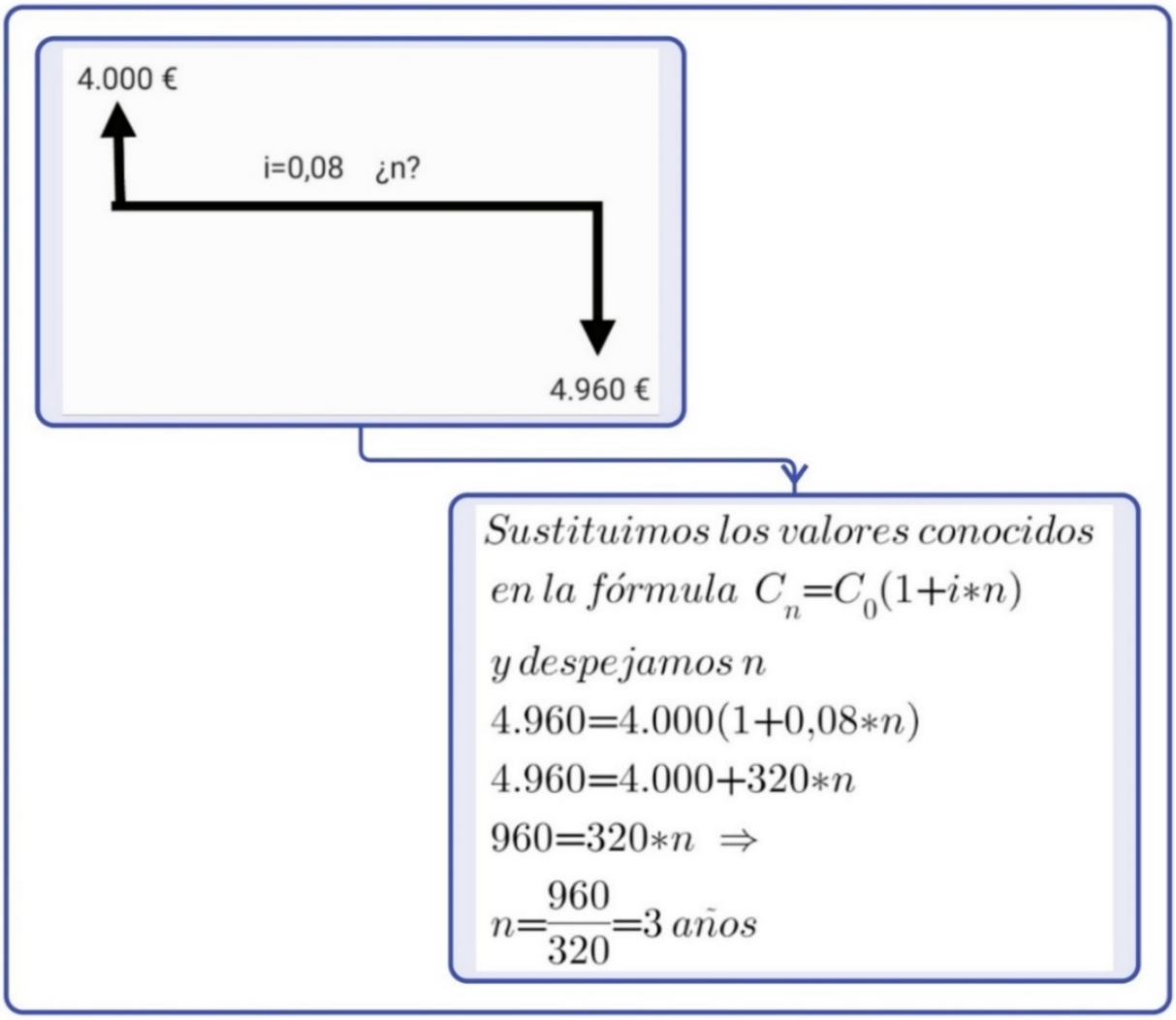


En este caso la incógnita es el capital inicial C_0.

Sustituimos los datos conocidos en la ecuación principal, despejamos C_0, y realizamos las operaciones para calcular su valor.

Este problema tambien se puede resolver aplicando la formula del capital inicial, $C_0=C_n/(1+i*n)$, como puede comprobar el lector.

3.- Solicitamos un préstamo de $4.000\,€$ al $8\,\%$ simple anual y al cabo de un tiempo devolvimos $4.960\,€$. ¿Cuánto tiempo duró la operación?



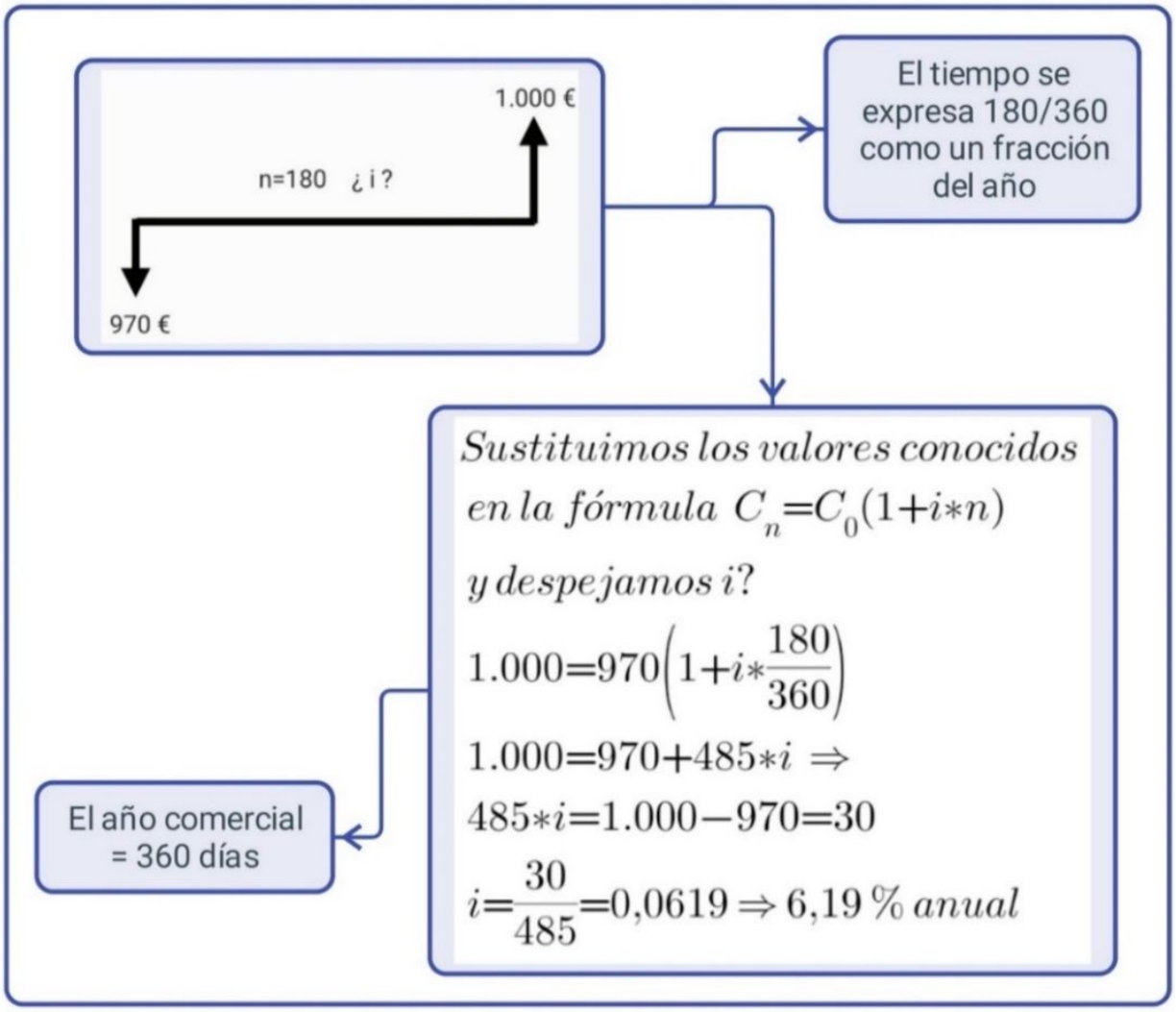
Ahora se trata de calcular el tiempo de la operación. En este caso, en años, dado que es como está expresado el tipo de interés.

El diagrama representa un préstamo desde el punto de vista del prestatario, que recibe el dinero al principio de la operación y lo devuelve al final junto con los intereses.

Igual que en el resto de problemas, utilizamos la fórmula principal, sustituyendo los valores de las variables conocidas y despejamos (n).

4.- En una subasta de letras del tesoro, la cotización media a 180 días fue del 97 %.

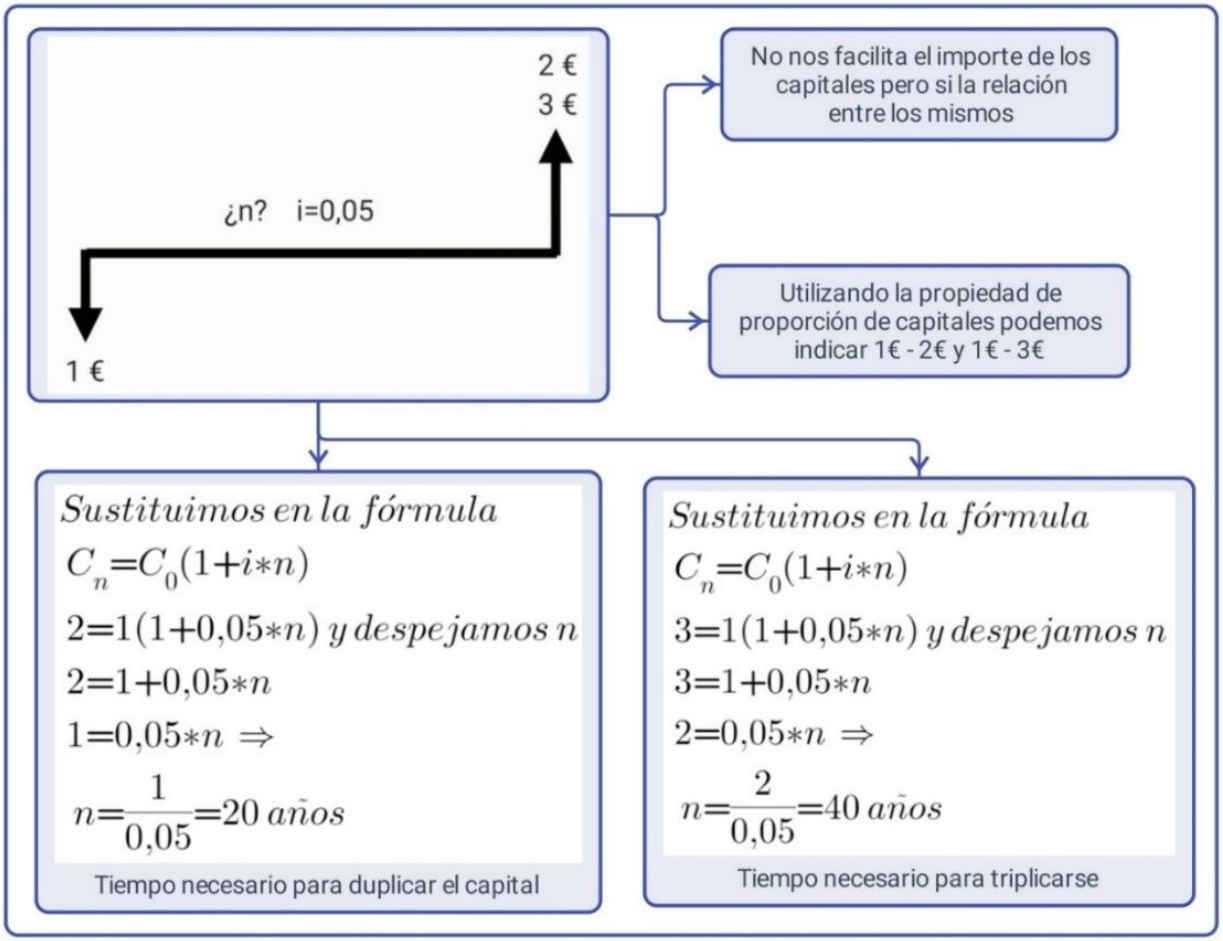
Calcula la rentabilidad, teniendo en cuenta que el nominal de cada letra es de 1.000 € y que en este mercado se utiliza la base de año comercial.



La rentabilidad es el tipo de interés implícito de la operación y la incógnita del problema.

El interés viene expresado en tanto por ciento anual, pero en la fórmula lo incluimos en tanto por uno. El tiempo lo introducimos como una fracción del año comercial de 360 días.

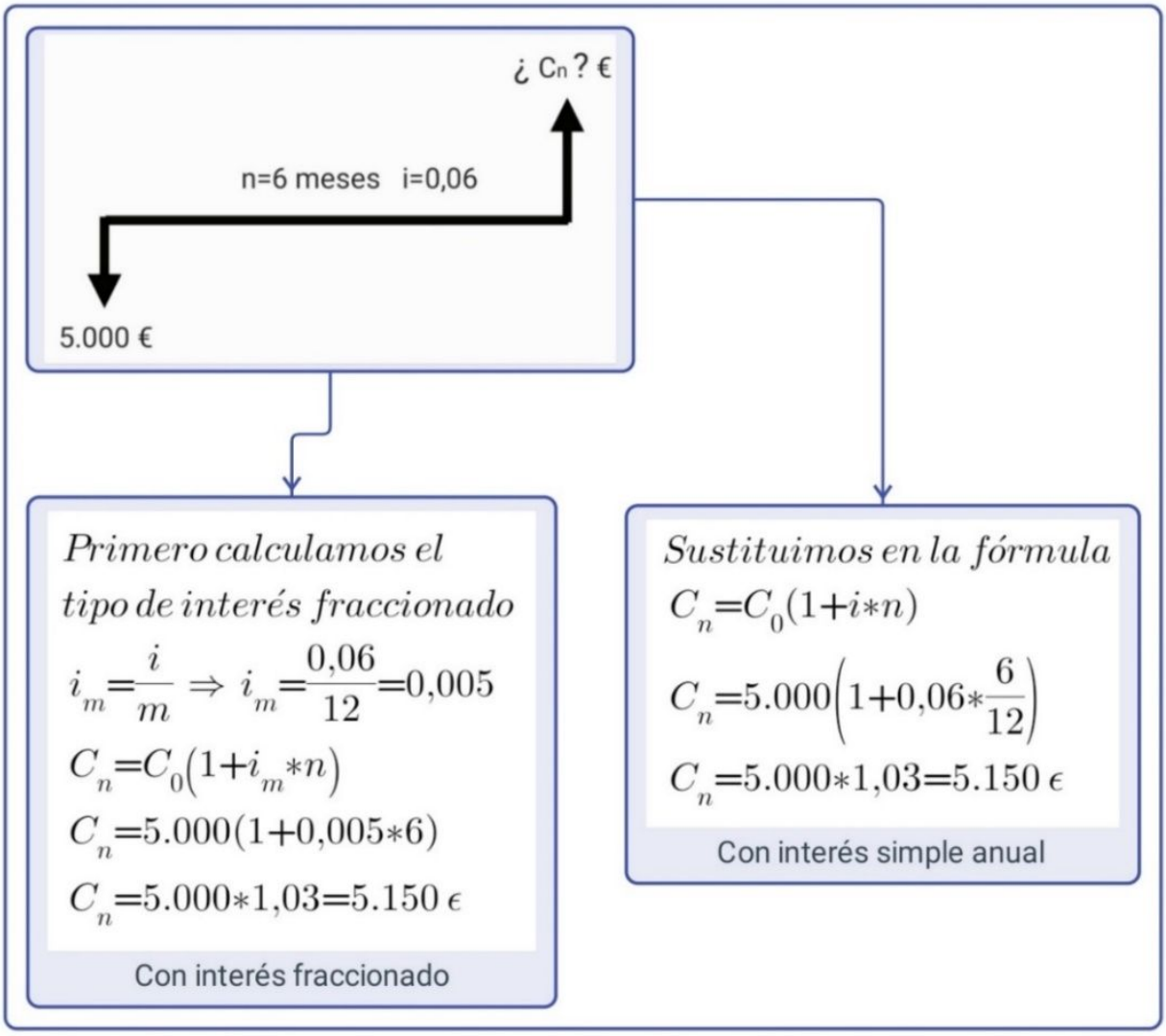
5.- ¿Cuánto tiempo es necesario para duplicar y triplicar una inversión con una rentabilidad simple anual del 5 %?



El enunciado no indica el importe concreto de la inversión, pero sí la relación entre el capital inicial y el final. Dada la propiedad de proporcionalidad de los capitales en las leyes financieras, expuesta en el mapa (3), podemos resolver el problema utilizando cualquier importe inicial, con la condición de que la cuantía final sea el doble de la inicial, en la primera pregunta, o el triple, en la segunda. Para simplificar utilizamos el capital inicial de 1 €; el final de 2 €, para el doble; y de 3 € para el triple.

Sustituimos en la fórmula principal y despejamos el tiempo (n) necesario.

6.- Calcula el montante de un depósito de 5.000 € durante 6 meses al tipo de interés del 6 % anual simple, utilizando las fórmulas de interés anual y la de interés fraccionado.

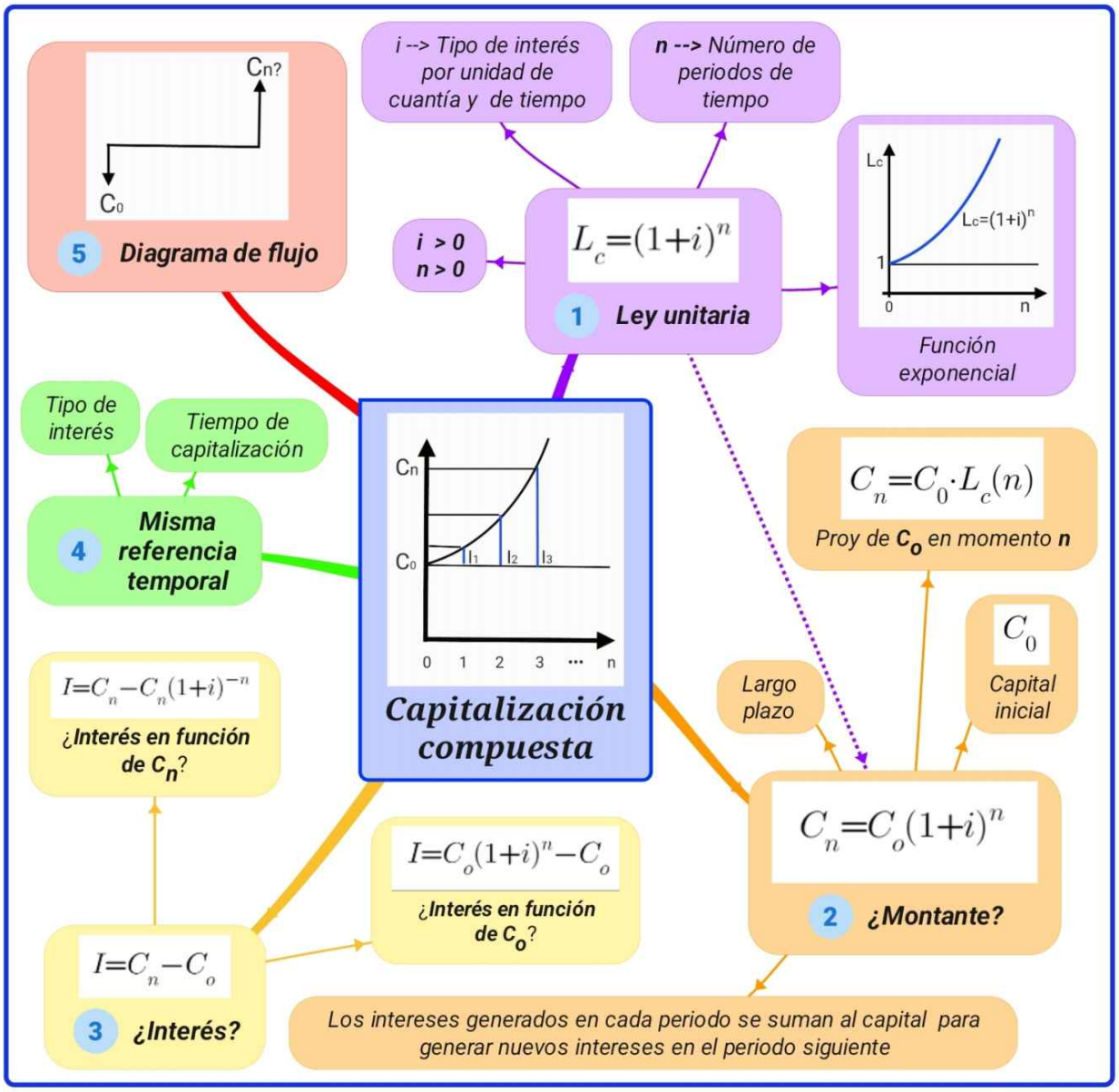


Para resolver este caso, tenemos dos opciones. Una, utilizar el tipo de interés anual que nos indica (el 6 %) y aplicar el tiempo en años, pero como una fracción del año ($6/12$).

Otra, calcular el tipo de interés mensual equivalente y aplicar el tiempo en número de meses. Una variante de esta sería calcular el tipo de interés equivalente del semestre y aplicar el tiempo en semestres.

***

26 Capitalización compuesta



En el centro del mapa representamos la capitalización compuesta. A diferencia de la capitalización simple, en la compuesta los intereses generados durante cada período se agregan al capital para producir nuevos intereses. Estamos suponiendo que existe más de un período de capitalización. En consecuencia, el desplazamiento o crecimiento del capital inicial en el tiempo sigue una función exponencial.

(1) **Ley unitaria**. Analizamos la ley en su forma unitaria, donde el capital inicial es una unidad monetaria. El tipo de interés $(i>0)$ es el precio de dinero por unidad de tiempo y de capital. En el gráfico, esta ley es una función creciente de forma exponencial, con origen en la unidad. En el eje horizontal representamos el tiempo interno de la operación $(n>0)$, que es positivo.

(2) **Montante.** C_n es igual al capital inicial, C_0, multiplicado por la ley financiera unitaria y representa su proyección en el momento (n). La expresión matemática recoge la acumulación de los intereses al capital en cada período de capitalización.

Esta ley se suele aplicar a largo plazo, aunque también puede ser usada para períodos inferiores a un año.

(3) **Intereses.** Otra fórmula básica es la que calcula los intereses (I) de la operación. Es igual al montante menos la cuantía del capital inicial, $I=C_n-C_0$. Además, podemos calcularlos con otras dos fórmulas.

- ✓ Una, el interés (I) a partir del capital inicial C_0, conocido también el tipo de interés (i) y el tiempo (n).
- ✓ Otra, el interés (I) a partir del montante C_n, conocido también el tipo de interés (i) y el tiempo (n).

(4) **Misma referencia temporal**. Igual que en otras leyes financieras, es necesario que el tipo de interés y el tiempo de capitalización estén expresados en la misma unidad temporal. Por ejemplo, el $4\ \%$ semestral, el porcentaje se refiere a un período de capitalización de seis meses. Si no fuera así, tenemos que calcular el tipo de interés fraccionado equivalente, tema que analizaremos en el siguiente mapa.

(5) **Diagrama**. Estamos considerando una ley simple desde el punto de vista del número de capitales, en la que tanto la prestación como la contraprestación constan de un solo capital. Esta representación, como ejemplo, corresponde a un depósito desde el punto de vista del depositante. La flecha inicial que apunta hacia

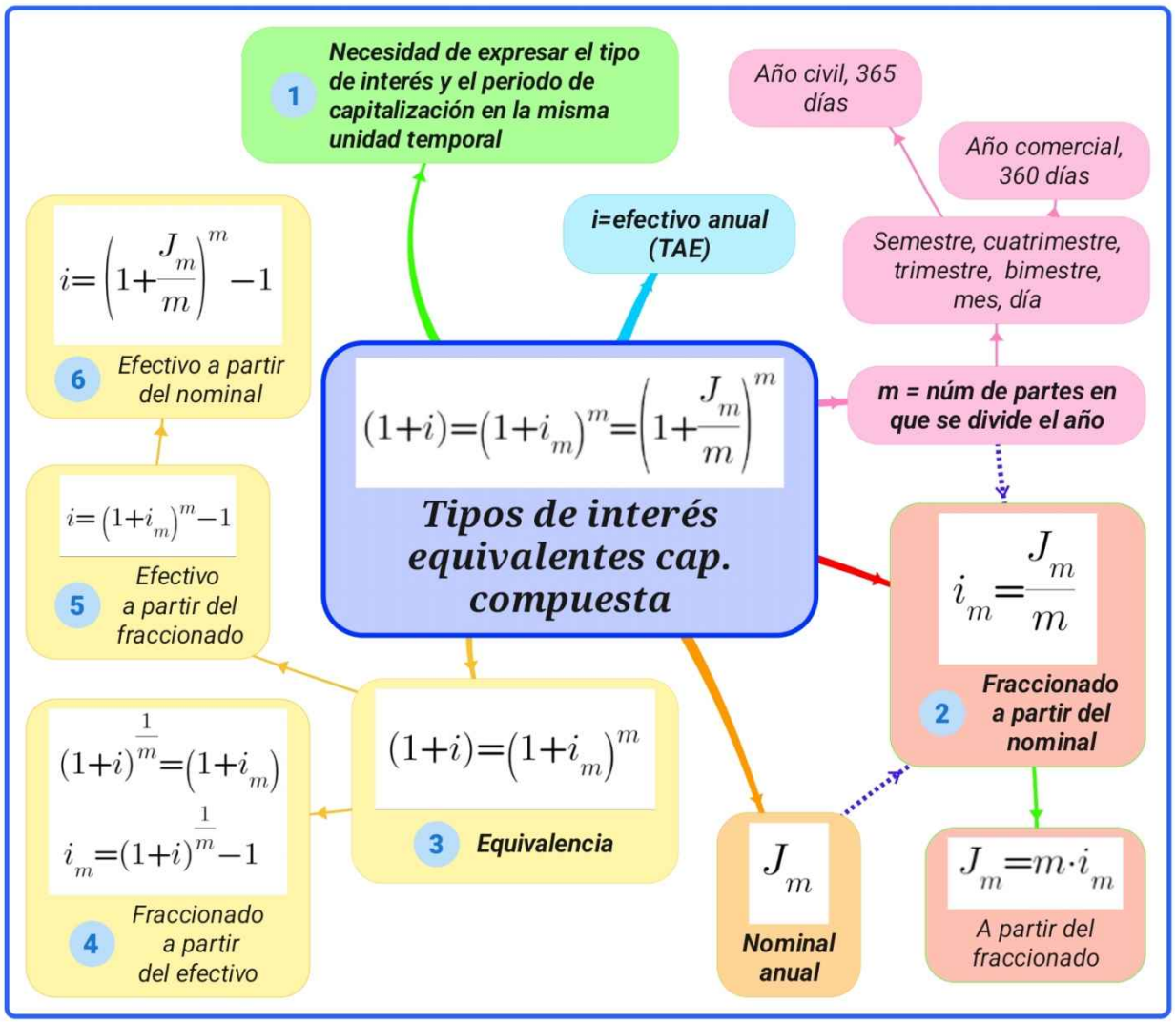
abajo (es un pago o salida de dinero), y la final apuntando hacia arriba (un cobro).

Desde el punto de vista del banco (quien recibe el depósito), el diagrama es el inverso del indicado.

***

27 Tipos de interés equivalentes en capitalización compuesta

Hay tres modalidades de interés diferentes que describimos a continuación y que mostramos en la imagen central del mapa.



Con estas fórmulas se trata buscar la equivalencia entre las tres modalidades:

- ✓ (J_m), tipo de interés nominal anual.
- ✓ (i_m), tipo de interés fraccionado, igual al nominal entre las veces que se fracciona el año (m).

- ✓ (i), tipo de interés efectivo anual, también llamado TAE (tasa anual equivalente).

(1) **Misma referencia temporal**. Hay que aplicar el tipo de interés en la misma unidad temporal que el período de capitalización. Para ello, cuando son diferentes, es necesario calcular el tipo de interés equivalente. En la capitalización compuesta, la relación no es proporcional porque los intereses de cada período de capitalización se agregan al capital para producir nuevos intereses.

(2) **Interés fraccionado**. Este es el tipo de interés fraccionado a partir del nominal. El nominal siempre es anual y el fraccionado es el nominal entre el número de veces que se fracciona el año.

(3) **Ecuación de equivalencia financiera.** Para calcular la relación entre el tipo de interés efectivo anual y el interés fraccionado, partimos de esta igualdad, en la que hemos establecido la equivalencia financiera entre una unidad monetaria calculada al interés efectivo (i) y la misma unidad capitalizada a interés fraccionado (i_m).

(4) **Fraccionado a partir del efectivo**. A partir de la equivalencia anterior despejamos el interés fraccionado en función del efectivo.

(5) **Efectivo**. Y el efectivo en función del fraccionado.

(6) **Efectivo a partir del nominal**. Si sustituimos (i_m) por ($i_m=J_m/m$), tenemos la fórmula del interés efectivo anual a partir del nominal.

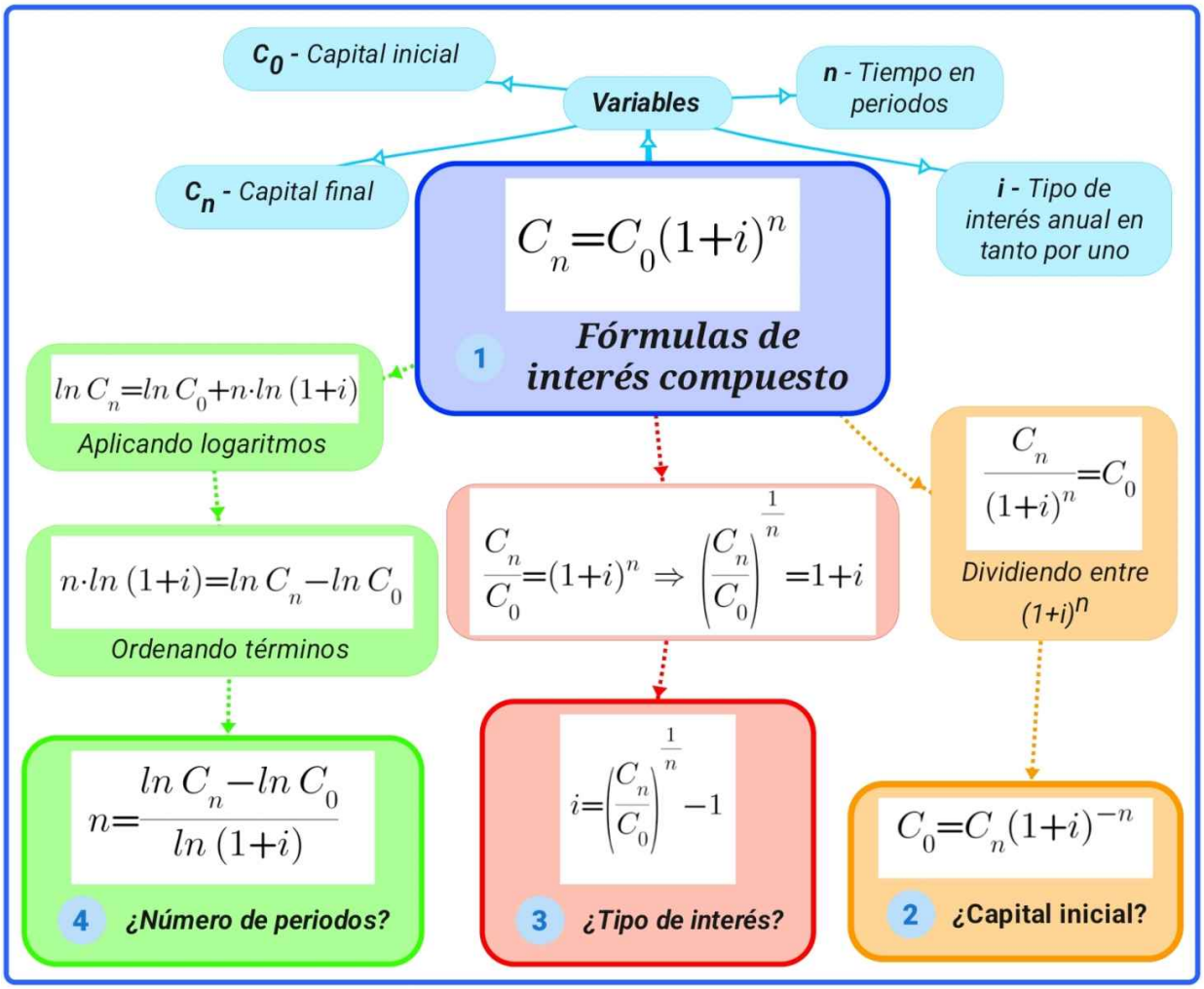
Como hemos podido ver a partir de la fórmula central del mapa, se pueden despejar las distintas modalidades de tipo de interés en función de las otras.

En la práctica, al aplicar la capitalización fraccionada, prestamista y prestatario acuerdan el interés nominal J_m y su frecuencia (m) y a

partir de él, se calcula el tipo de interés fraccionado $i_m=J_m/m$, y el efectivo anual $i=(1+i_m)^m-1$.

***

28 Fórmulas de interés compuesto



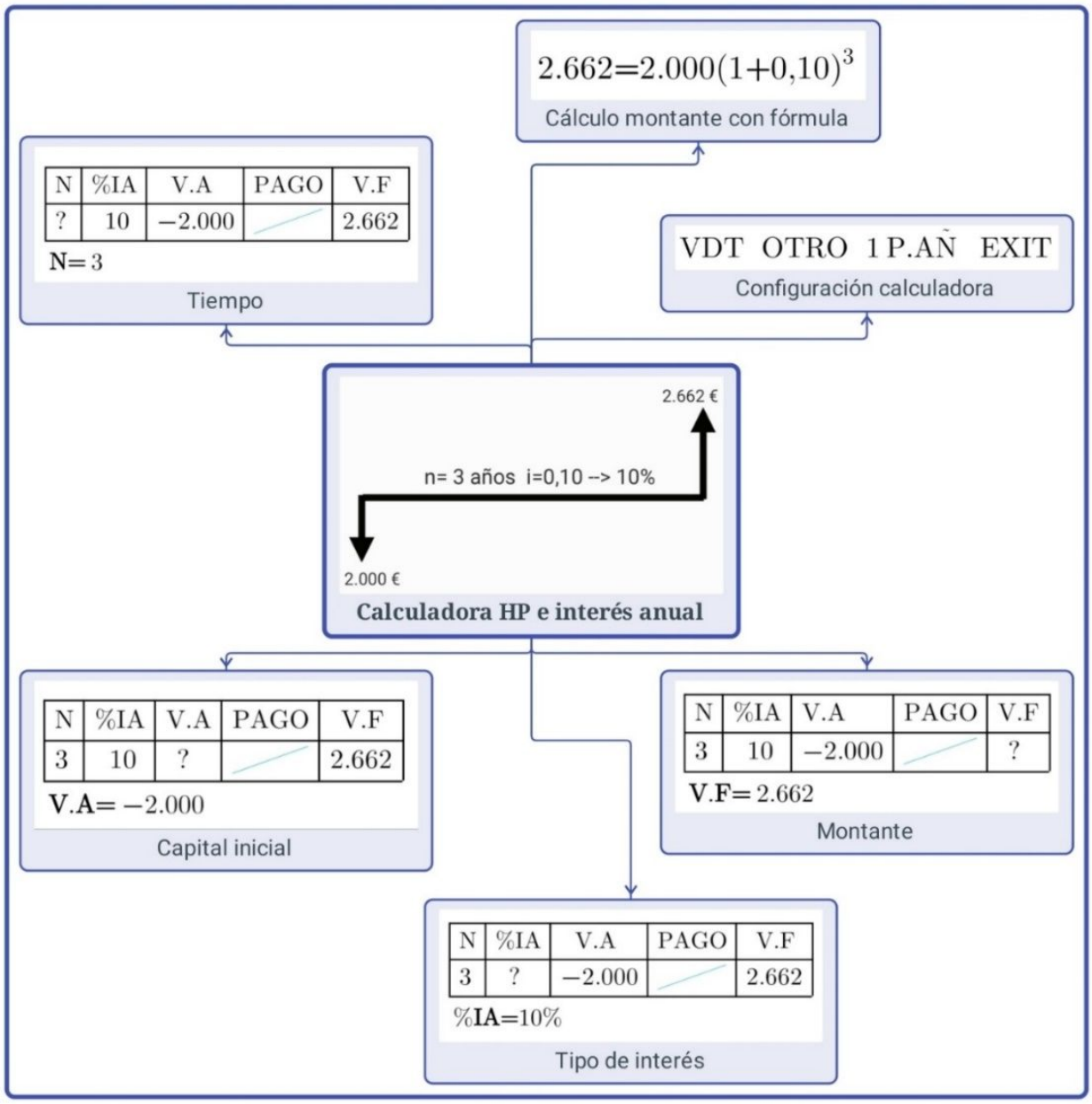
Para solucionar los ejercicios y problemas, como veremos en los ejemplos siguientes, es suficiente con sustituir en la fórmula principal del montante el valor numérico de las variables conocidas, despejar la incógnita y realizar las operaciones para calcular su valor, pero como alternativa se pueden obtener previamente las fórmulas y realizar los cálculos con las mismas.

Una buena práctica es tratar de obtener las fórmulas a partir de la fórmula principal expuesta en (1). En caso de necesitar ayuda, al final del libro, en el bloque de repaso de matemáticas, se indican algunos métodos para despejar incógnitas.

***

29 Capitalización compuesta con calculadora

1.- La explicamos con un ejemplo: Capital de 2.000 €, interés nominal anual del 10 % y plazo de 3 años.



La razón de este mapa es porque a partir de ahora en los ejemplos vamos a utilizar, además de las fórmulas, la calculadora y Excel. Ya hemos visto en el mapa (21) la introducción de datos en la

calculadora, pero ahora incorporamos un caso práctico para ver cómo se calculan cada una de las variables.

El diagrama central del mapa muestra los datos del ejemplo. Y en las diversas ramas se desarrollan: la solución con fórmula, la configuración de la calculadora, y el cálculo de cada una de las variables en función de las otras tres conocidas.

En la calculadora, el capital inicial, C_0, es V.A., y el montante, C_n, es V.F.

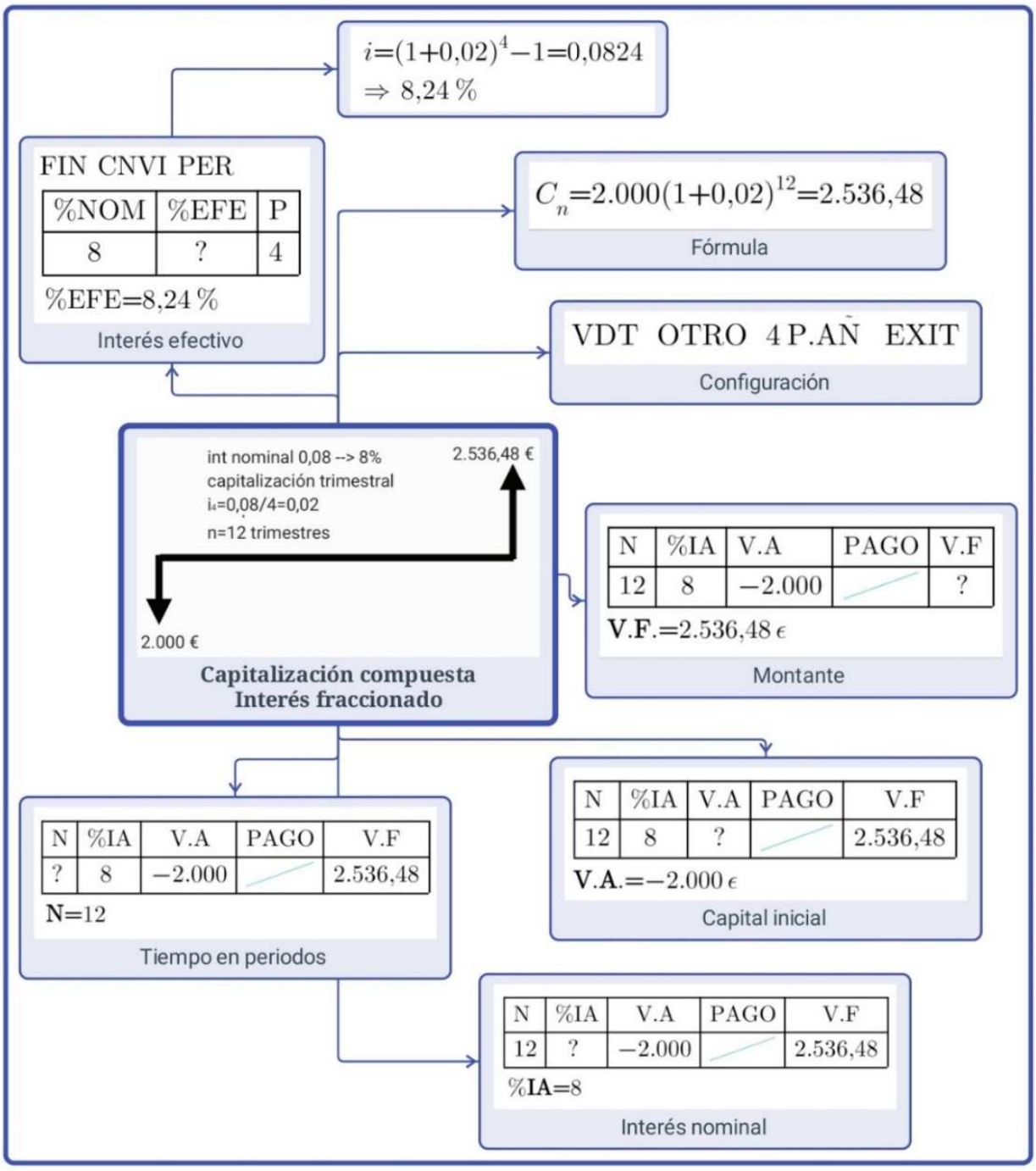
La operativa consiste en introducir las tres variables dadas y calcular la cuarta mediante la pulsación de la tecla correspondiente. En este caso, el V.A es una salida de dinero, por ello lo introducimos en negativo y, en consecuencia, el V.F. es positivo. En caso de que el valor actual, en vez de un pago, fuera un cobro, los signos serían V.A. (+) y V.F (-).

Este es un ejemplo de una operación simple (que tiene un solo capital, tanto la prestación como la contraprestación), con un tipo de interés nominal (que siempre es anual), por ello, en la configuración previa de la calculadora se indica un pago por año (1.AÑ).

En el menú VDT también existe la variable PAGO, que no se utiliza en este supuesto porque es una operación simple y no hay pagos periódicos en el tiempo que dura la operación.

***

2.- Con interés fraccionado. Interés nominal del 8 %. Capitalización compuesta trimestral de 2.000 € durante 3 años.



Este es un ejemplo de otra operación simple con interés compuesto fraccionado. Los datos están en el diagrama central.

En la calculadora, igual que en el caso anterior, se introduce el tipo de interés nominal, pero en la configuración se introduce el número de pagos por año (4 P.AÑ). El número total de pagos (N) es el resultado de multiplicar los pagos por año por el número de años. El signo del V.A. (-) y del V.F. (+) es igual que en supuesto anterior.

Las diversas ramas del mapa indican: la solución con fórmula, la configuración de la calculadora, y el cálculo de cada una de las variables después de introducir los datos conocidos de las otras tres.

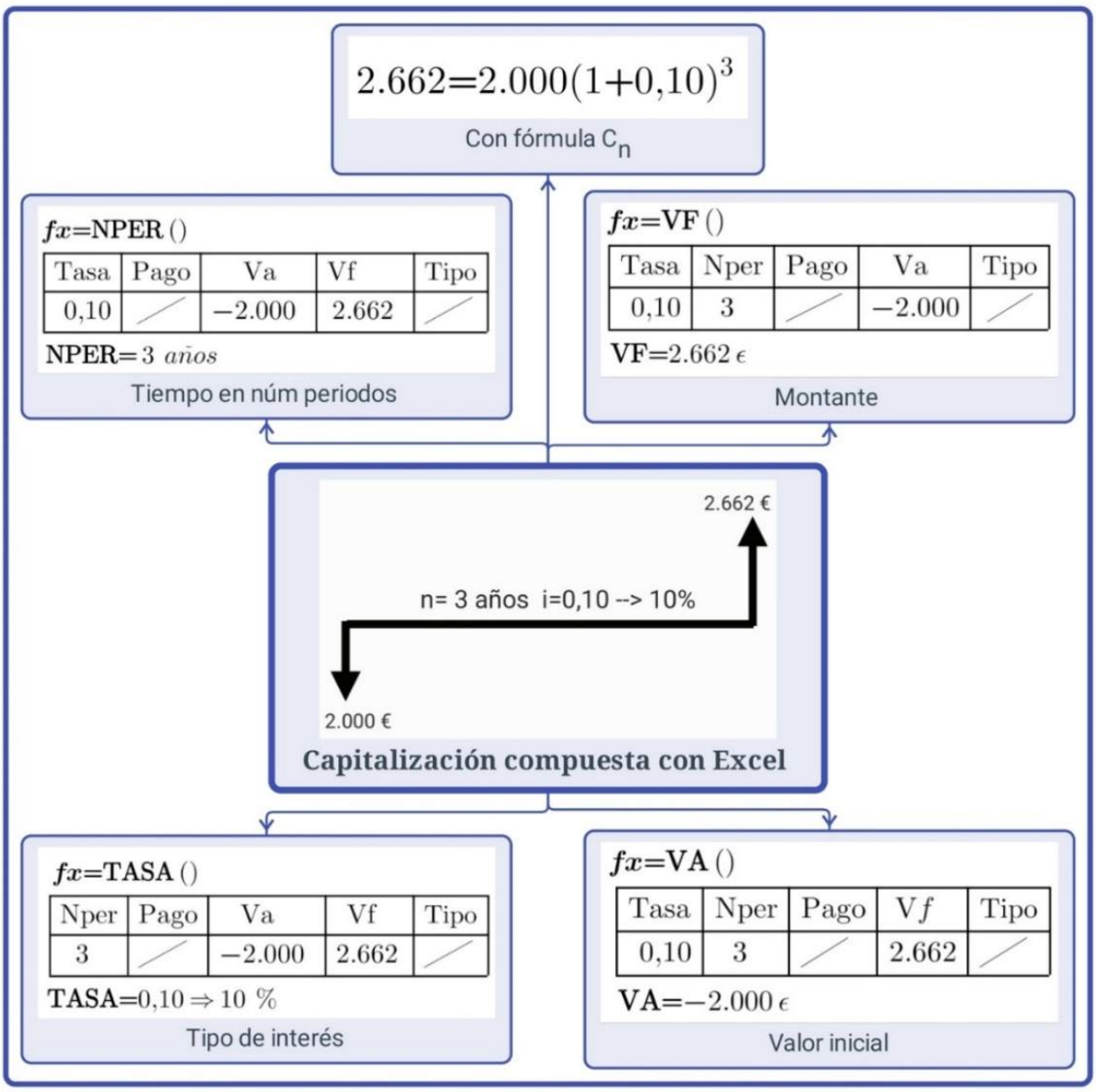
Además, en este mapa se incluye el cálculo del interés efectivo, con fórmula y calculadora. Así podemos ver las tres opciones de interés que se usan en capitalización compuesta. El nominal que ya lo da el enunciado, el 8 %. El fraccionado que es igual al nominal entre el número de capitalizaciones en el año 8/4= 2 % y el efectivo calculado, el 8,24 %.

Por ser una operación simple, tampoco se utiliza la variable PAGO.

***

30 Capitalización compuesta con Excel

1.- Este es el mismo caso ya resuelto en el mapa (29.1), pero ahora con Excel.



Los datos están sobre el diagrama central. Y en las diversas ramas, las soluciones, mediante las funciones de Excel para cada una de las variables, después de introducir los datos de las otras tres.

El Va se introduce en negativo porque se trata de una salida de dinero y, en consecuencia, el Vf es positivo. Esta convención de los signos es igual que en las calculadoras financieras.

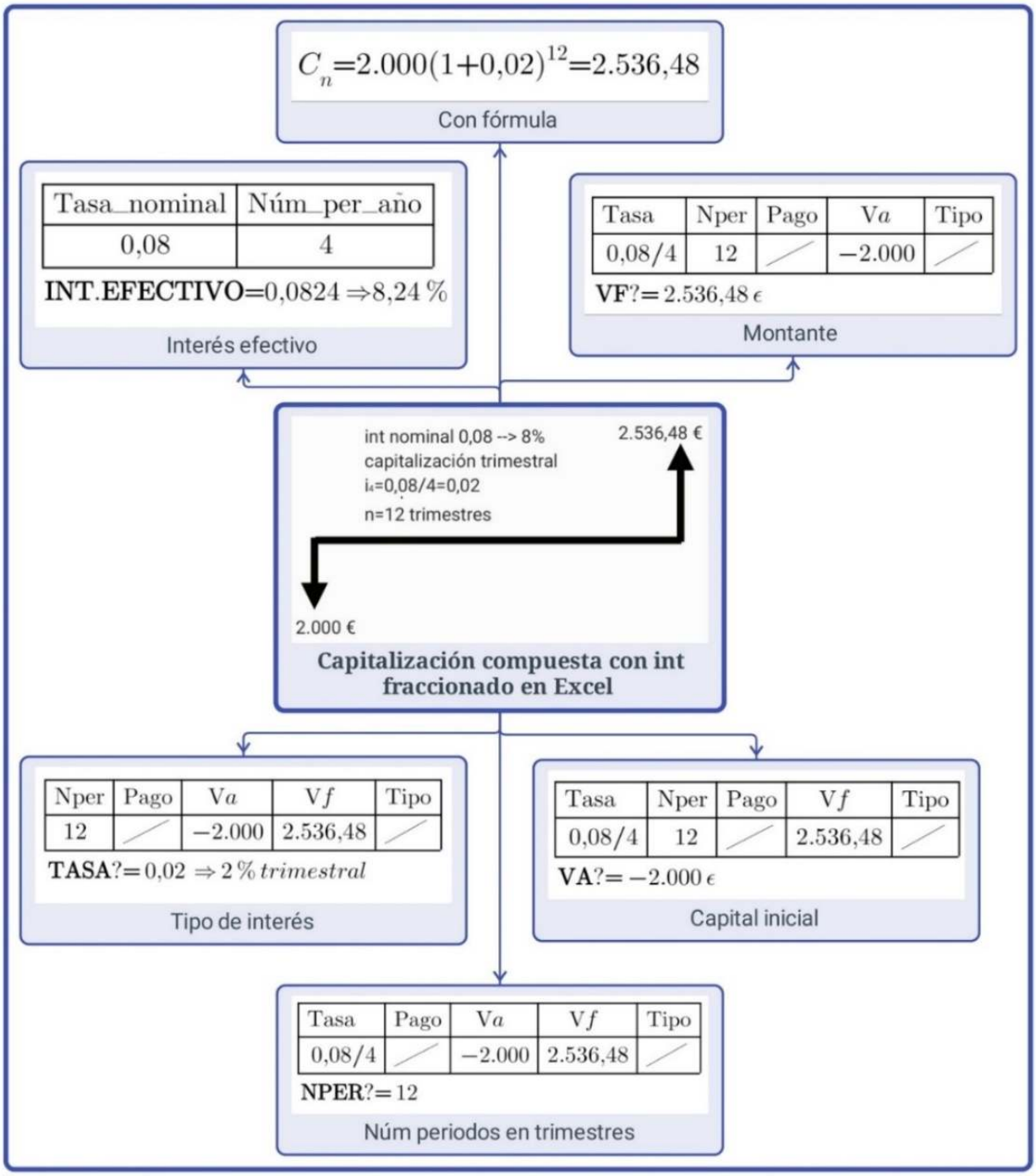
En este caso, no se usan las variables Pago y Tipo porque es una operación simple (un solo capital, tanto prestación como contraprestación).

El tipo de interés se introduce en tanto por uno, excepto que configuremos la celda correspondiente en formato porcentaje, que en ese caso se introduciría en tanto por ciento.

***

2.- Ahora, el mismo ejemplo resuelto en el mapa (29.2), pero con Excel e interés fraccionado.

Interés nominal del 8 %. Capitalización compuesta trimestral de 2.000 € durante 3 años.



Los datos están sobre el diagrama central. Y en las diversas ramas, las soluciones, igual que en el mapa anterior.

La introducción de datos y el cálculo son similares al caso anterior, pero con la diferencia de que el tipo de interés fraccionado se introduce en Tasa y es igual al tipo de interés nominal dividido entre el número de capitalizaciones que hay en el año.

Se introduce también en tanto por uno, excepto que tengamos configurada la celda que recoge este dato, en formato porcentaje. En ese caso se introduciría en tanto por ciento.

El número de períodos (Nper), es el total de períodos de capitalización.

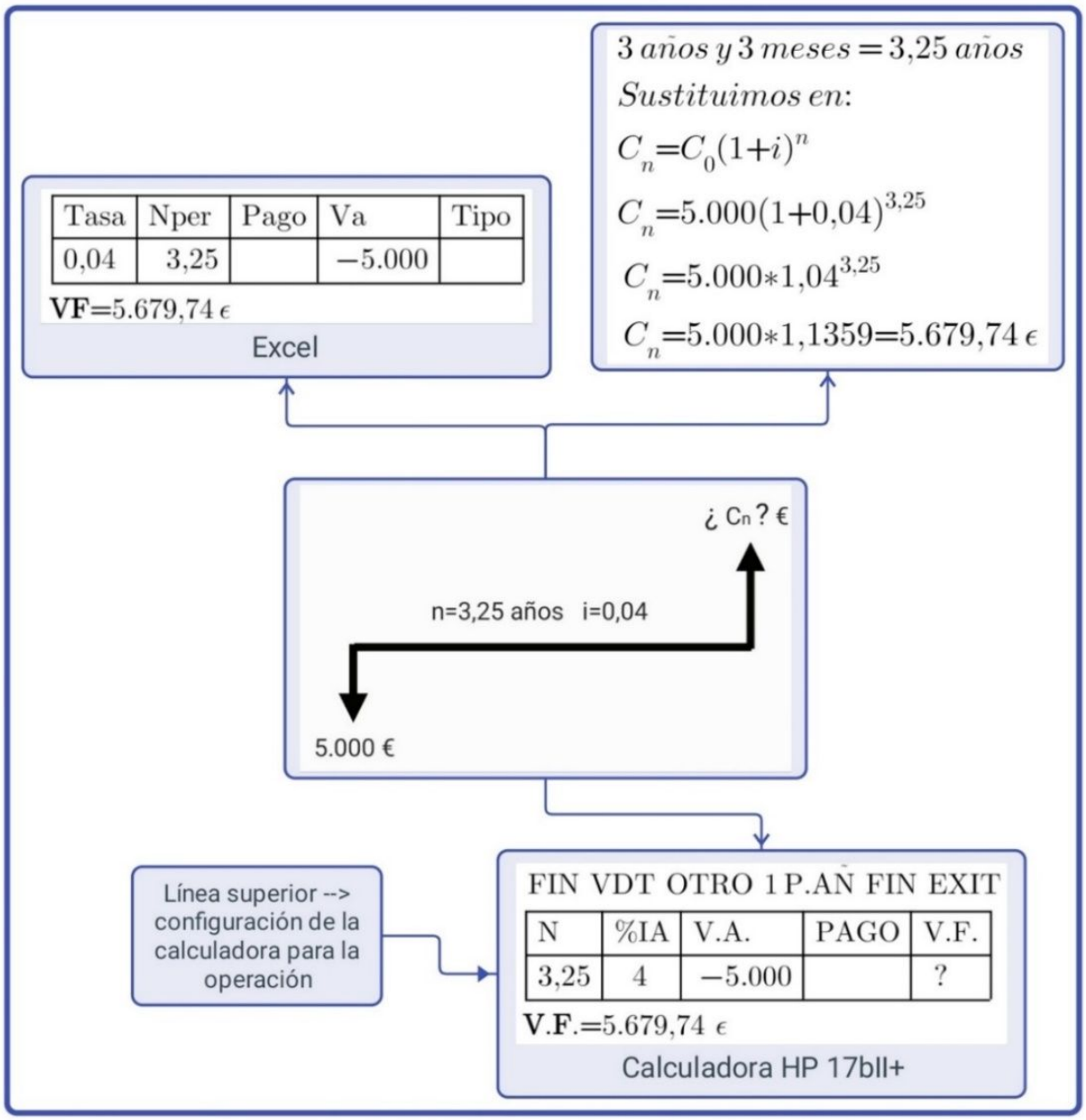
En este mapa se incluye también el cálculo del interés efectivo con la función de Excel (INT.EFECTIVO). De esta forma, podemos ver las tres opciones de interés que se utilizan en capitalización compuesta. El nominal que ya lo da el enunciado, el 8 %. El fraccionado que es igual al nominal entre el número de capitalizaciones en el año 8/4=2 % y el efectivo calculado, el 8,24 %.

***

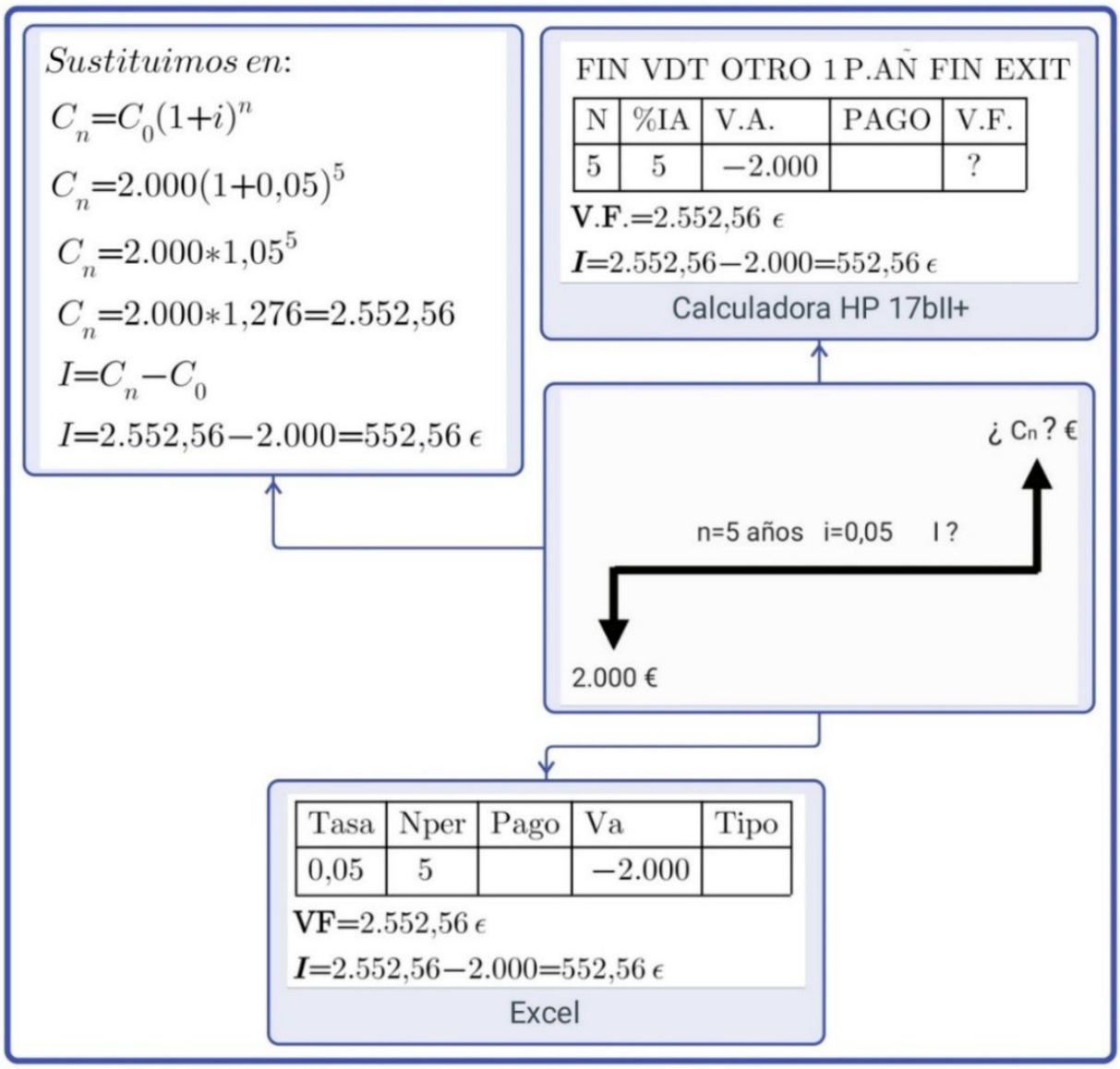
31 Ejemplos sobre la ley de capitalización compuesta

1.- ¿Cuál es el montante de un capital de 5.000 €, al 4 % efectivo anual durante 3 años y 3 meses?

(Además de la solución algebraica, en la mayor parte de los ejemplos incluimos la solución con calculadora y Excel).

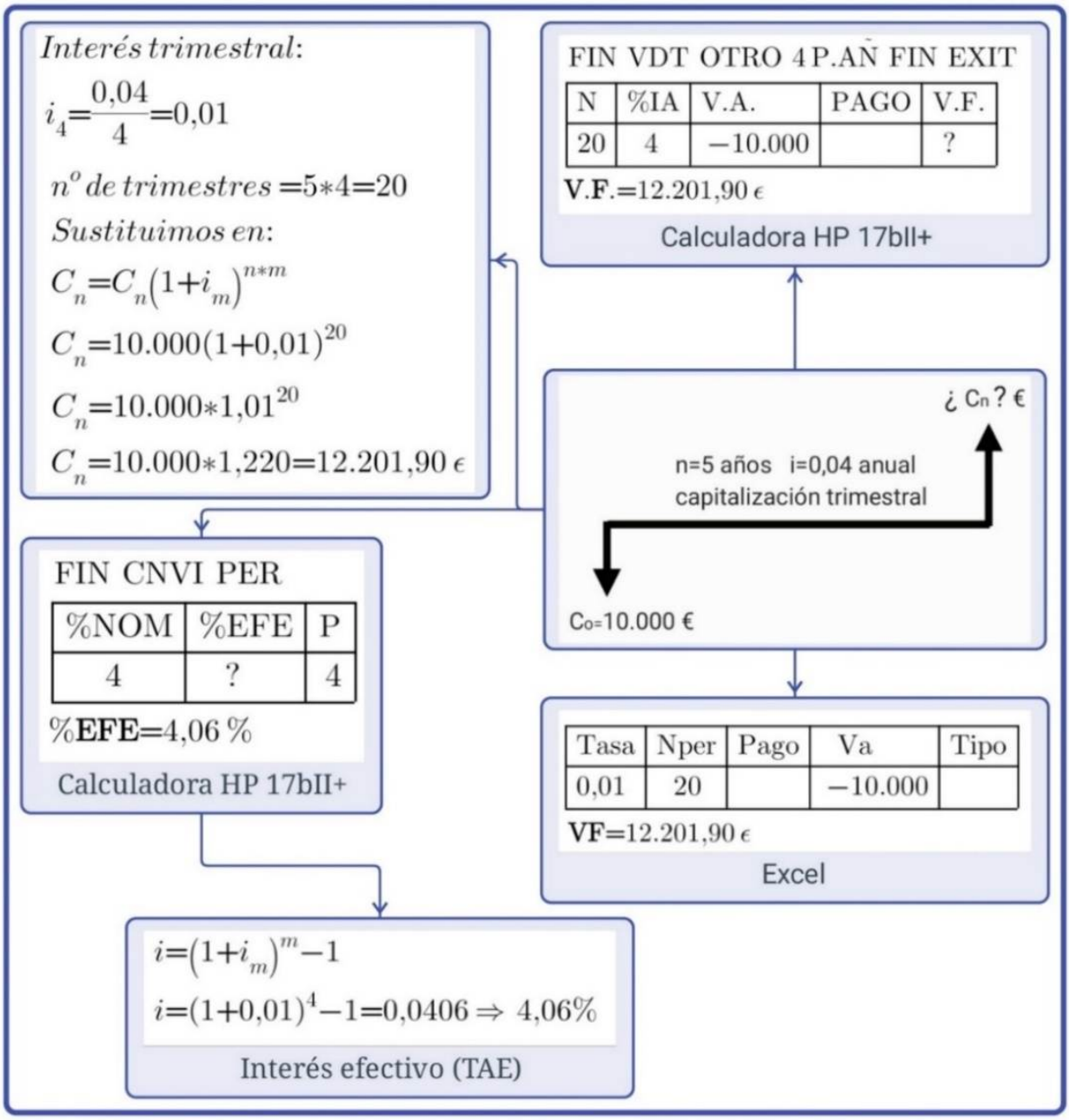


2.- Calcula los intereses producidos por un capital de 2.000 €, invertido al 5 % anual durante 5 años.



Primero calculamos el montante o capital final C_n y luego los intereses, $I=C_n-C_0$.

3.- Se efectúa un depósito de 10.000 € a plazo fijo durante 5 años, al 4 % nominal, con abono de intereses trimestrales que se reinvierten al mismo tipo de interés. ¿Cuánto es el saldo al final de la operación? ¿Cuál es la TAE de la operación?



En este ejemplo, una vez resuelto, aparecen las tres modalidades de tipo de interés en capitalización compuesta. El nominal, que se

encuentra en el enunciado, el equivalente trimestral (i_4) y el efectivo anual (TAE).

4.- Compramos un bono por 900 €, su valor de reembolso al cabo de 4 años es de 1.000 €. ¿Cuál es el tipo de interés implícito?

Sustituimos en:

$$C_n = C_0(1+i)^n \quad i?$$

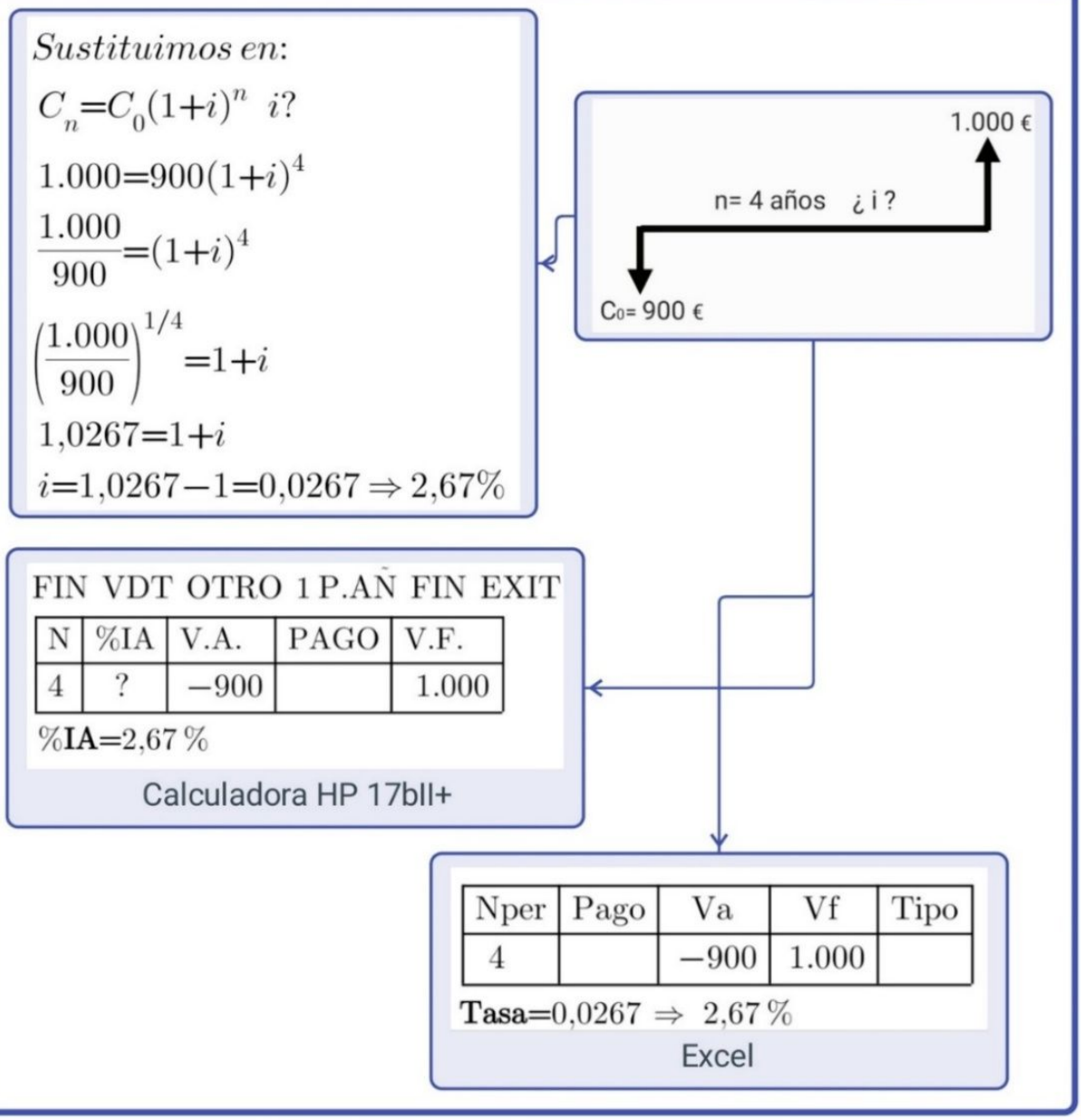
$$1.000 = 900(1+i)^4$$

$$\frac{1.000}{900} = (1+i)^4$$

$$\left(\frac{1.000}{900}\right)^{1/4} = 1+i$$

$$1{,}0267 = 1+i$$

$$i = 1{,}0267 - 1 = 0{,}0267 \Rightarrow 2{,}67\%$$



FIN VDT OTRO 1 P.AÑ FIN EXIT

N	%IA	V.A.	PAGO	V.F.
4	?	−900		1.000

%IA=2,67 %

Calculadora HP 17bII+

Nper	Pago	Va	Vf	Tipo
4		−900	1.000	

Tasa=0,0267 ⇒ 2,67 %

Excel

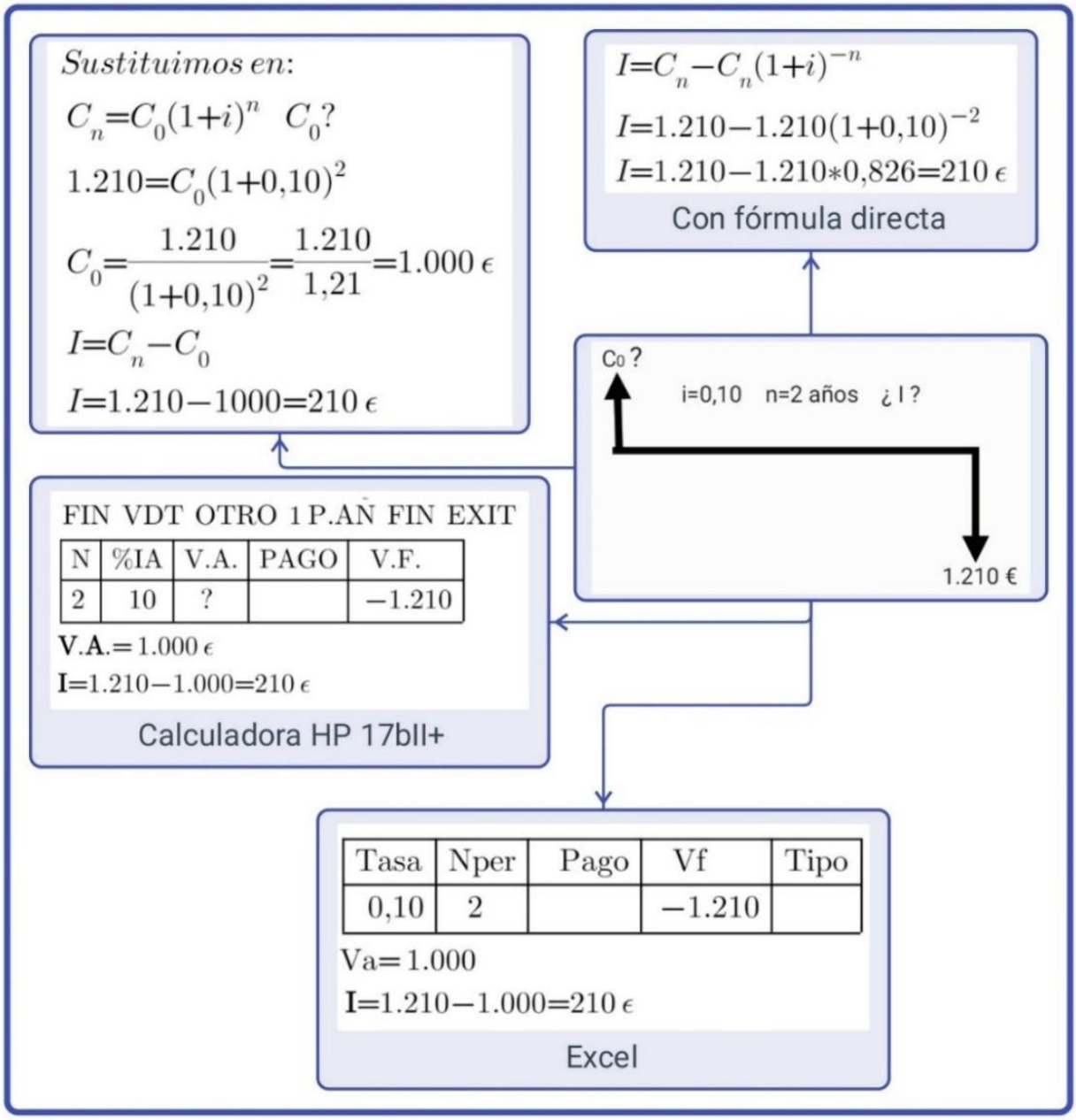
Los bonos son títulos de renta fija. Más adelante, al tratar el tema de valoración de renta fija, veremos más ejemplos.

La incógnita es el tipo de interés. El resultado se expresa en tanto por uno cuando lo calculamos con la fórmula y con Excel. La

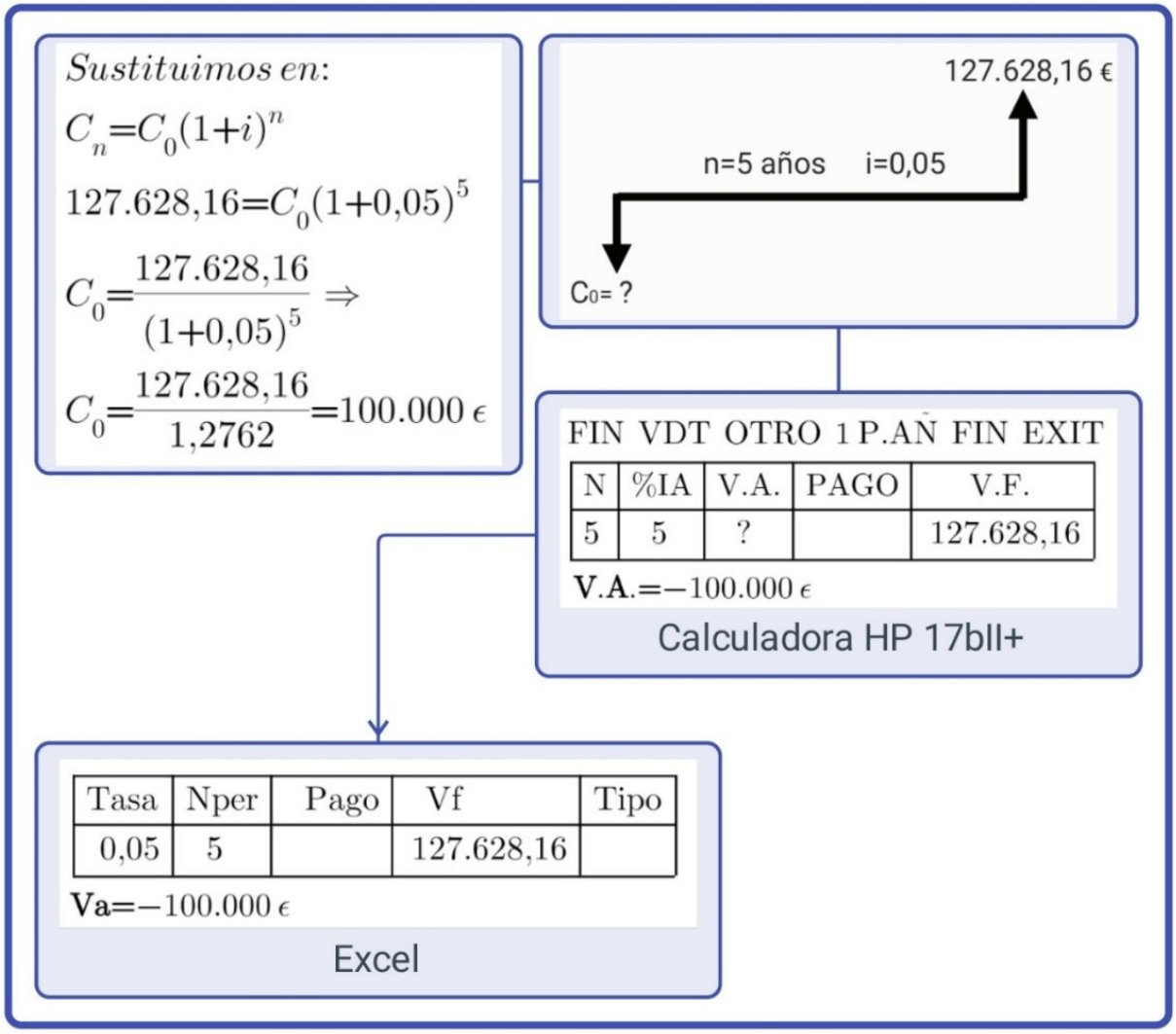
calculadora da el resultado directamente en tanto por ciento.

5.- Hoy cancelamos una financiación por importe de 1.210 € que hemos obtenido hace dos años al realizar una compra, al tipo de interés del 10 % compuesto anual. ¿Cuánto hemos pagado de intereses?

En este caso necesitamos calcular primero el capital inicial C_0 y, dado que ya conocemos C_n, podemos calcular los intereses con la fórmula $I=C_n-C_0$.



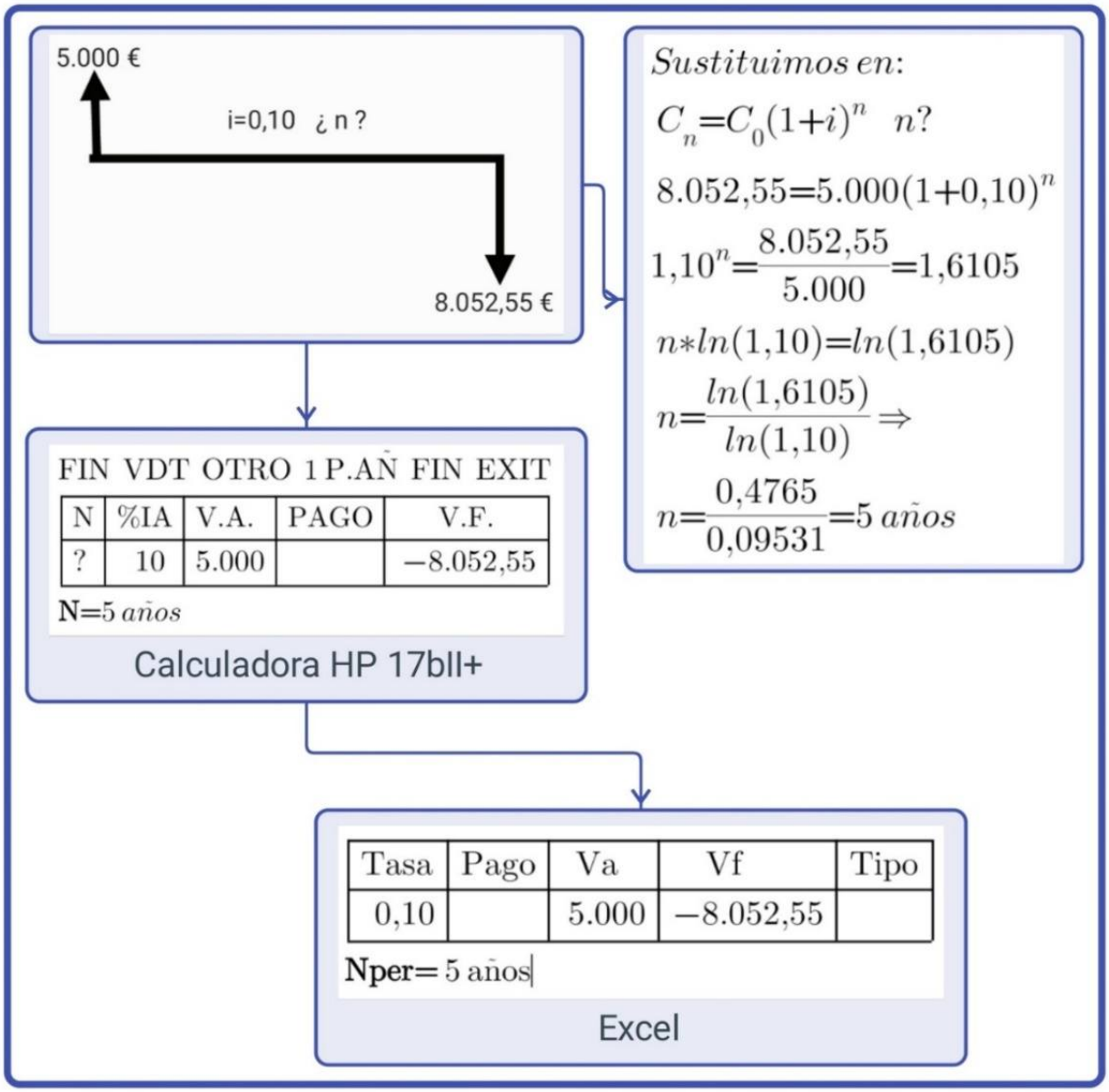
6.- Pablo tiene una cartera de acciones adquirida hace 5 años. La rentabilidad media durante dicho periodo es del 5 %. Hoy tiene un valor de 127.628,16 €. ¿Cuánto ha invertido inicialmente?



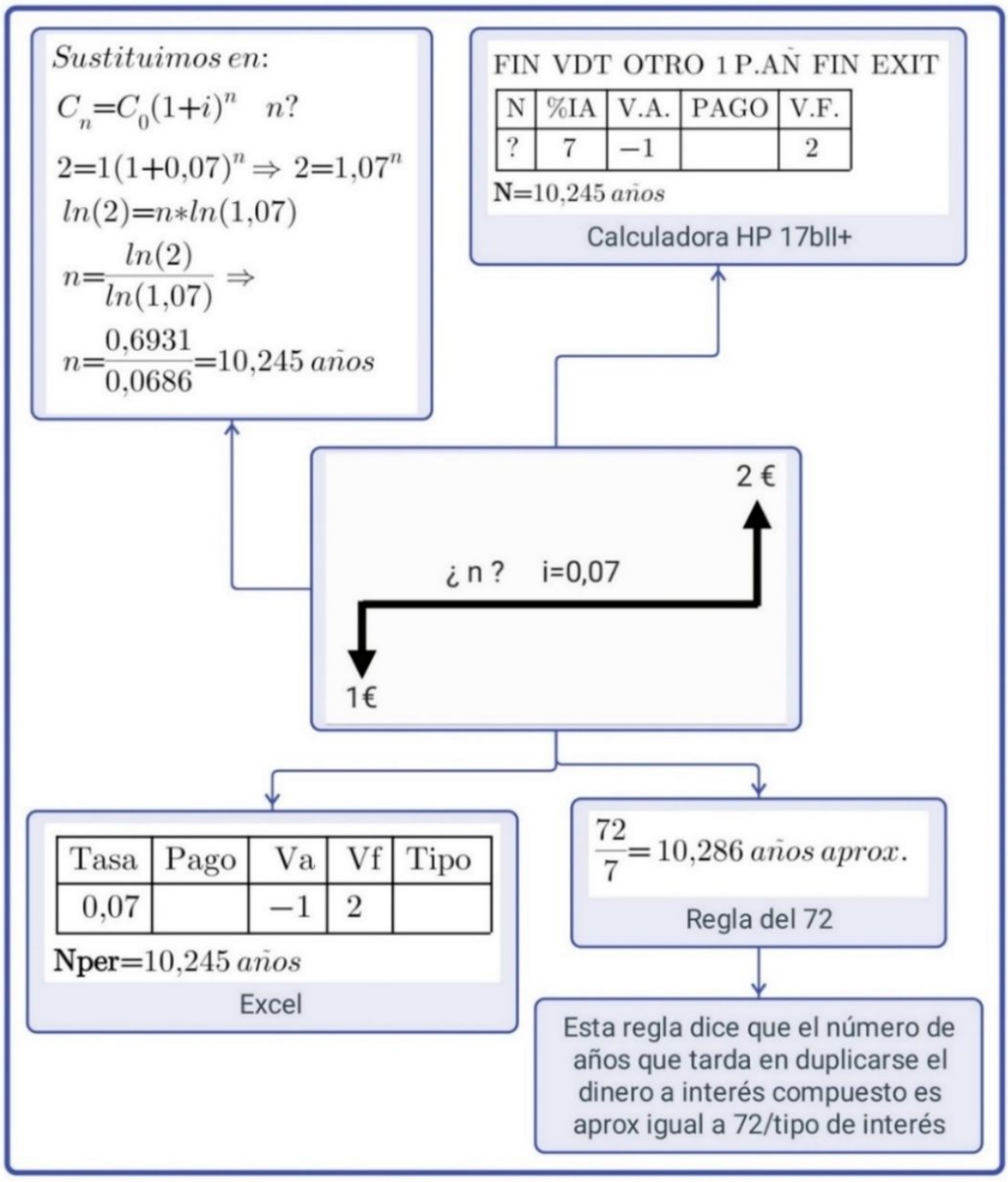
La incógnita es el capital inicial. Sustituimos en la ecuación principal de capitalización compuesta y despejamos C_0.

Tanto con la calculadora como con Excel, la inversión inicial es un número negativo porque corresponde a una salida de dinero.

7.- Hemos solicitado un préstamo de $5.000\ €$ con amortización y liquidación al vencimiento, por el que hemos pagado $8.052{,}55\ €$, liquidados al $10\ \%$ anual ¿Cuánto tiempo duró la operación?



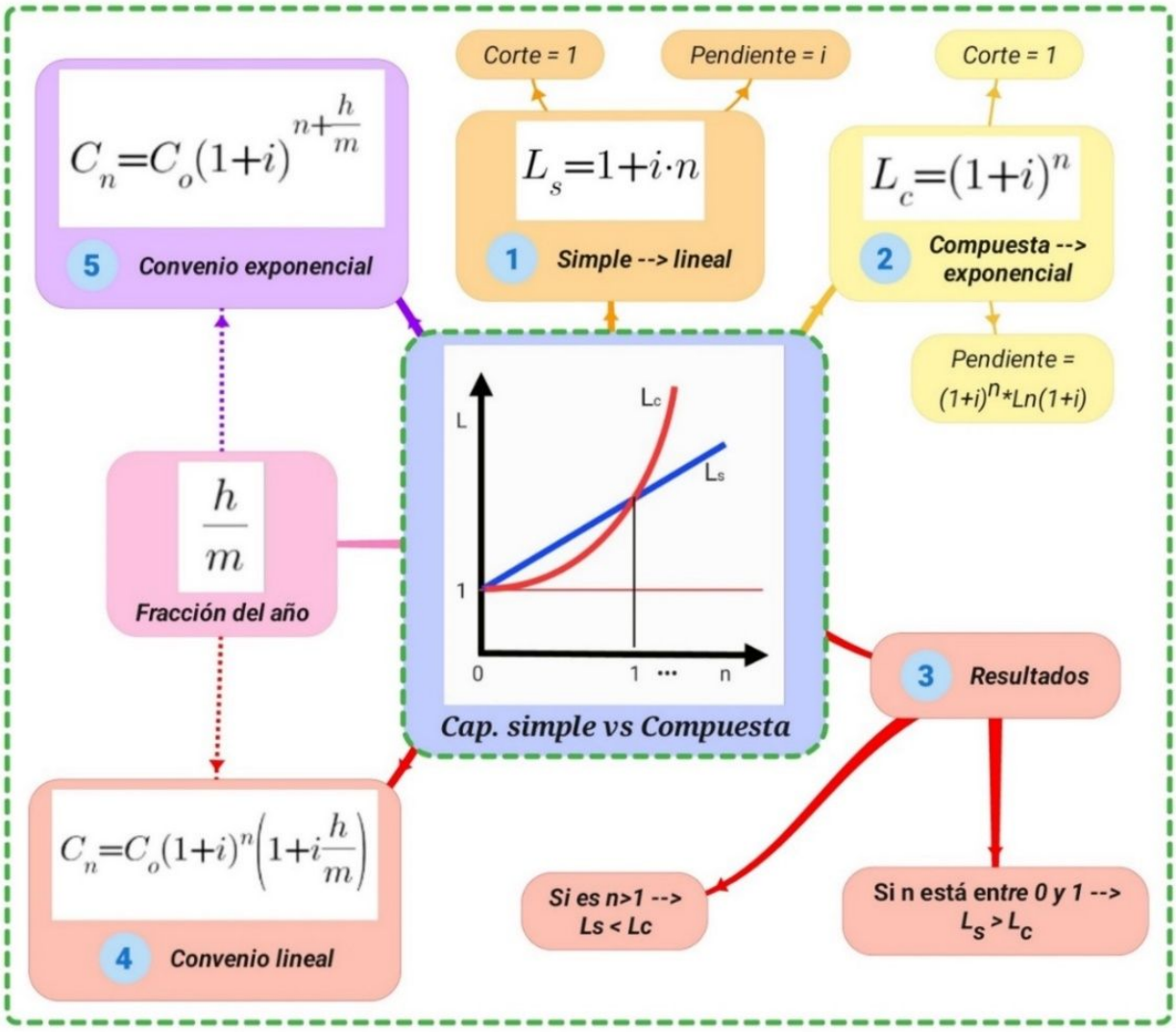
8.- ¿Cuánto tiempo es necesario para duplicar un capital con capitalización compuesta aplicando el tipo de interés del 7 % anual?



Utilizamos el capital inicial de $1\,€$ y el final de $2\,€$, pero podríamos haber calculado el tiempo necesario con otros importes, con tal que se mantenga la misma relación entre ambos.

***

32 Capitalización simple vs compuesta



(1) **Ley unitaria capitalización simple.** Realizamos el análisis comparando las leyes unitarias correspondientes. La capitalización simple L_s es una función lineal, la recta azul del gráfico central. El valor del corte en eje de ordenadas es igual a uno (cuantía del capital unitario) y la pendiente igual el tipo de interés (i).

(2) **Ley unitaria de capitalización compuesta**. Es la curva en rojo del gráfico L_c, y sigue una función exponencial. El punto de corte de ordenadas también es igual a uno y la pendiente (primera derivada

de la función) es $dL_c/d_n=(1+i)^n+Ln(1+i)$. Dado que la base del exponente es mayor que la unidad, la función será creciente. Las dos curvas se cortan cuando el tiempo interno es igual a un año.

(3) **Montantes.** Como consecuencia de las funciones anteriores, los resultados en cuanto al valor del montante serán:

- ✓ Cuando (n) está entre 0 y 1, $L_s>L_c$. Es decir, a menos de un año la capitalización simple es superior a la compuesta.
- ✓ Cuando $n=1$ $L_s=L_c$. En un año exacto, los montantes son iguales.
- ✓ Cuando $n>1$, $L_s<L_c$. En plazos superiores a un año la capitalización simple es inferior a la compuesta.

(4) **Convenio lineal.** Cuando la duración de la operación consta de una parte entera en años (n), más una fracción del año h/m, existen dos formas de resolver el problema de capitalización.

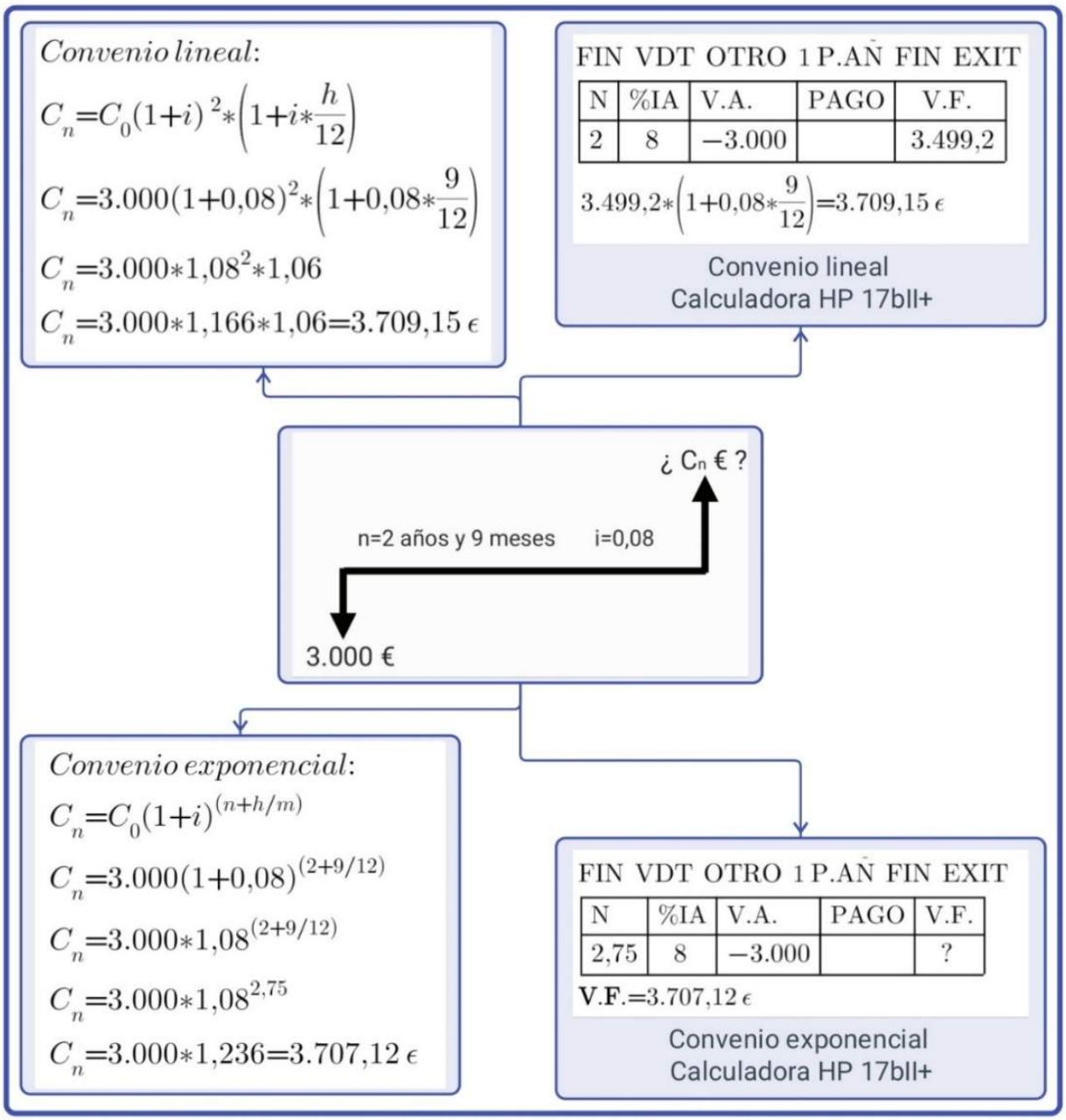
Una es el convenio lineal, por el que se aplica a la parte entera la capitalización compuesta y a la fracción del año la capitalización simple, tal como se expresa en la fórmula.

(5) **Convenio exponencial.** Otra opción es el convenio exponencial, mediante el cual se aplica la capitalización compuesta a todo el período. En este caso, el tiempo que figura en el exponente de la fórmula es en número mixto compuesto por la parte entera y la fracción del año.

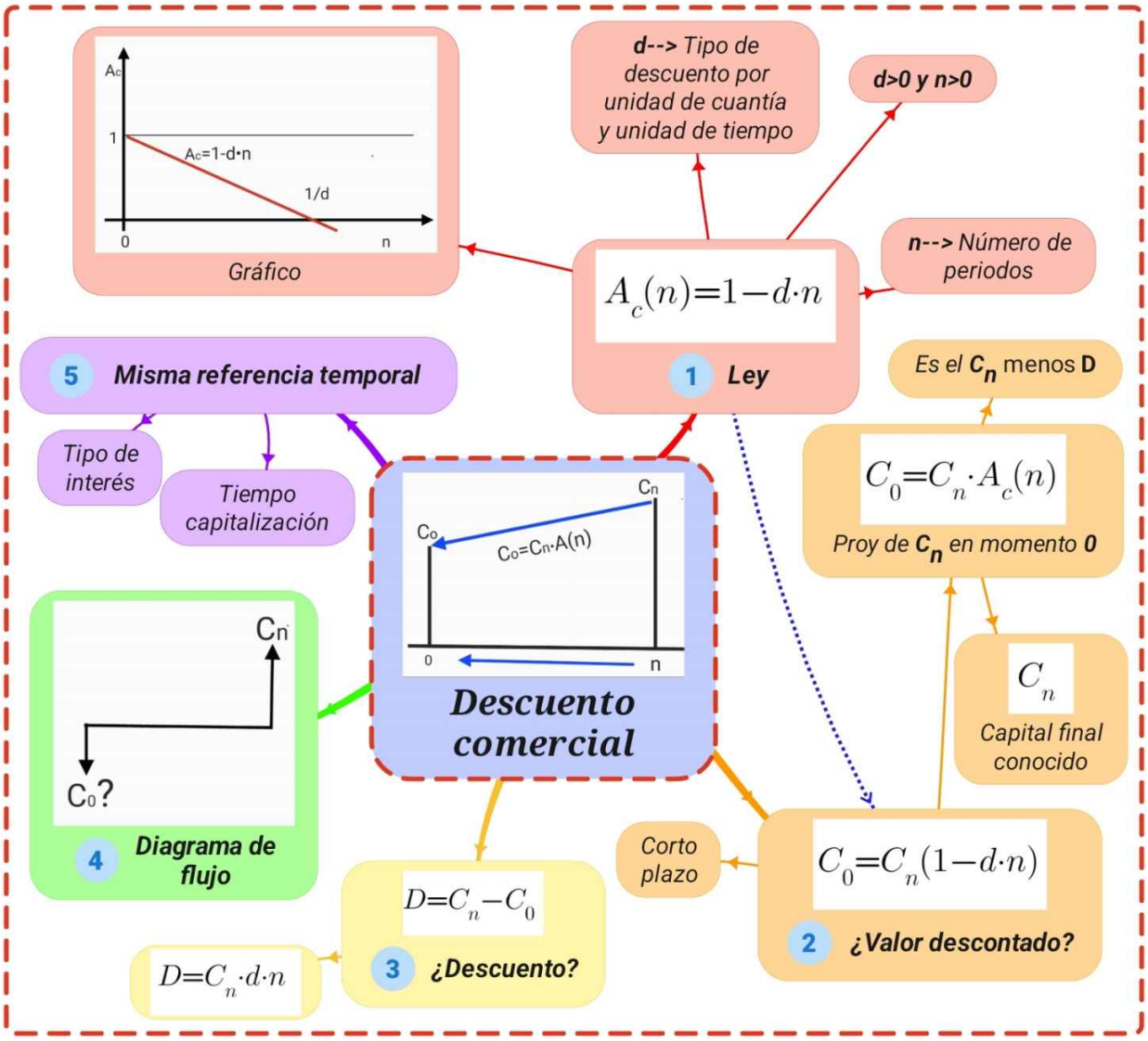
***

33 Ejemplo de aplicación del convenio lineal y exponencial

Calcula el montante de un depósito de 3.000 € al 8,00 % durante dos años y nueve meses, utilizando el convenio lineal y exponencial.



34 Ley de descuento comercial



(1) **Ley unitaria**. $A_c(n)$ es la expresión matemática de la ley unitaria de descuento comercial, donde (d) es el tipo de descuento por unidad de cuantía y unidad de tiempo, y (n) el tiempo interno de la operación. Tanto (d) como (n) son superiores a cero. La representación gráfica de esta ley es una función lineal decreciente en el tiempo, con pendiente (-d). El corte con el eje de ordenadas es uno y el de corte con el eje de abscisas es $1/d$, lo que implica que el descuento comercial tiene un tiempo de validez (n) entre cero y $1/d$.

(2) **Valor descontado.** Esta fórmula calcula el valor descontado. La expresión es el resultado de multiplicar el capital C_n por la ley unitaria indicada. Con ella conseguimos la proyección del capital C_n en el momento (0). Suele aplicarse en operaciones comerciales a corto plazo, tales como, descuento de letras, recibos, pagarés, anticipo de facturas, entre otras.

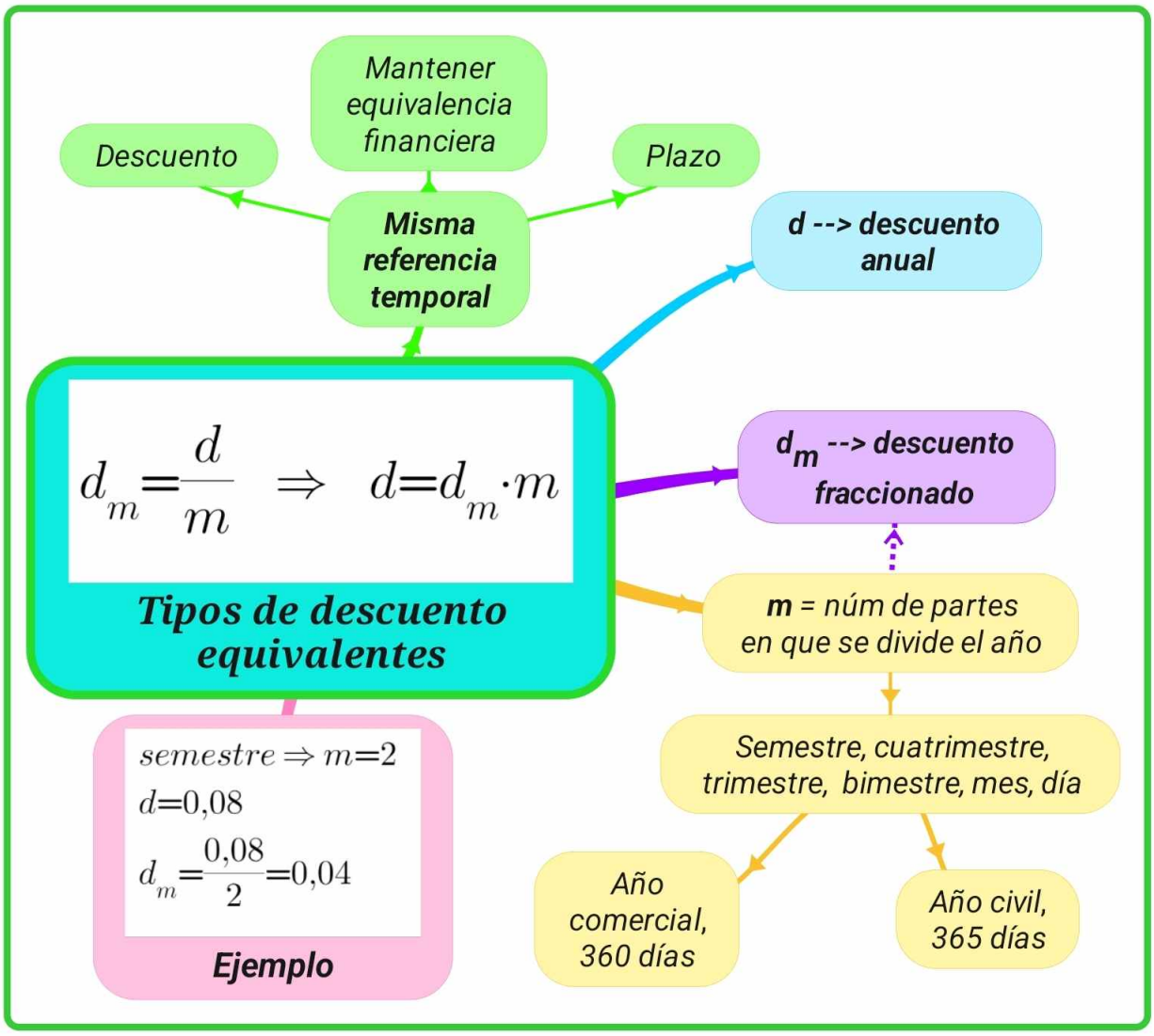
(3) **Descuento.** Además del valor descontado, calculamos el descuento o precio de la operación. La fórmula es $D=C_n*d*n$, o también $D=C_n-C_0$.

(4) **Diagrama.** En el diagrama de flujo C_0 representa el valor actual (VA) de un cobro futuro. Es decir, el valor en el momento actual del importe de una letra que vence dentro de (n) días, por ejemplo.

(5) **Misma referencia temporal.** Al igual que en el resto de leyes financieras, tanto el tipo de descuento (d) como el intervalo de tiempo han de expresarse en la misma unidad temporal. Es decir, que el tipo de descuento y tiempo de descuento han de ser homogéneos.

***

35 Tipos de descuento comercial equivalentes



Cuando en un problema el tipo de descuento se exprese en distinta unidad, necesitamos realizar la conversión mediante la aplicación de la fórmula central del mapa, calculando el tipo de descuento equivalente.

La relación entre los distintos tipos de descuento es proporcional por tratarse de una ley sumativa.

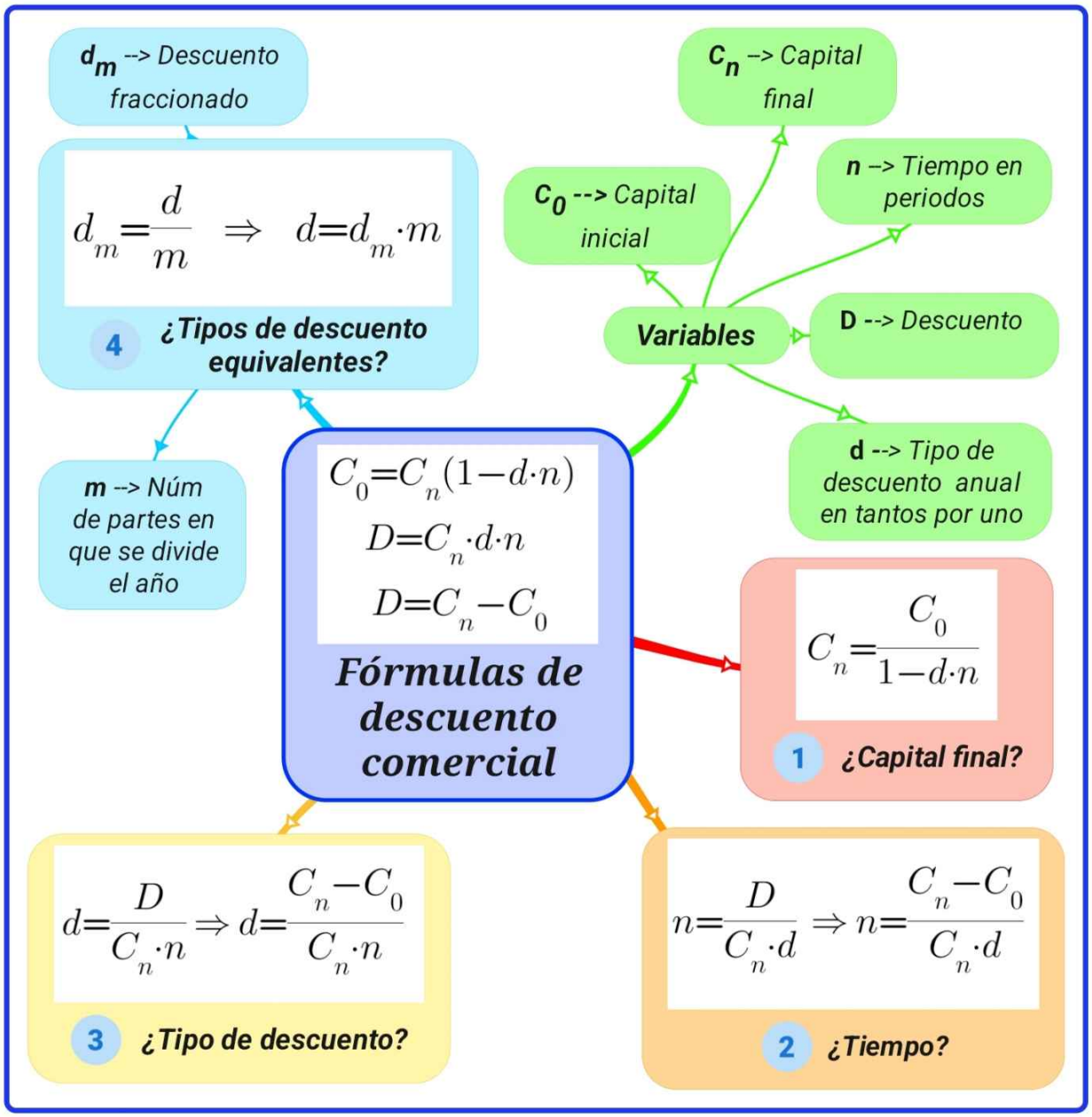
El parámetro (d) es el tipo de descuento anual, (m) el número de veces que se fracción el año y d_m el tipo de descuento fraccionado.

Este último puede ser semestral, cuatrimestral, bimestral, mensual, diario, entre otros.

El año comercial se considera de 360 días y el mes de 30 días.

***

36 Fórmulas de descuento comercial



Este es un resumen de las fórmulas de descuento comercial obtenidas a partir de la fórmula principal de descuento que se encuentra en el centro del mapa.

Se pueden usar para resolver los problemas, pero en la práctica no es necesario, ya que resulta más sencillo sustituir en la fórmula

principal las variables por sus valores conocidos y a continuación despejar y calcular la incógnita.

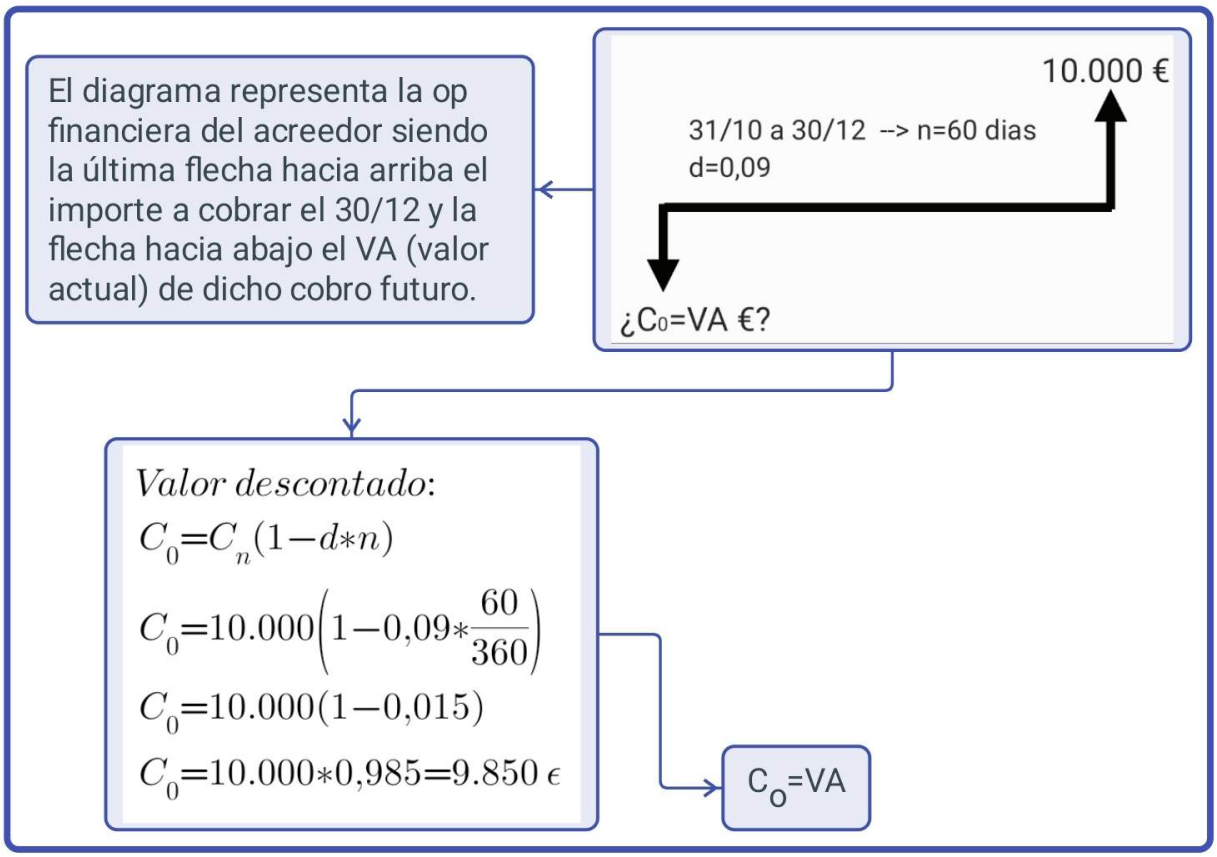
No obstante, es opción del lector seguir el método que más le guste.

***

37 Ejemplos sobre descuento comercial

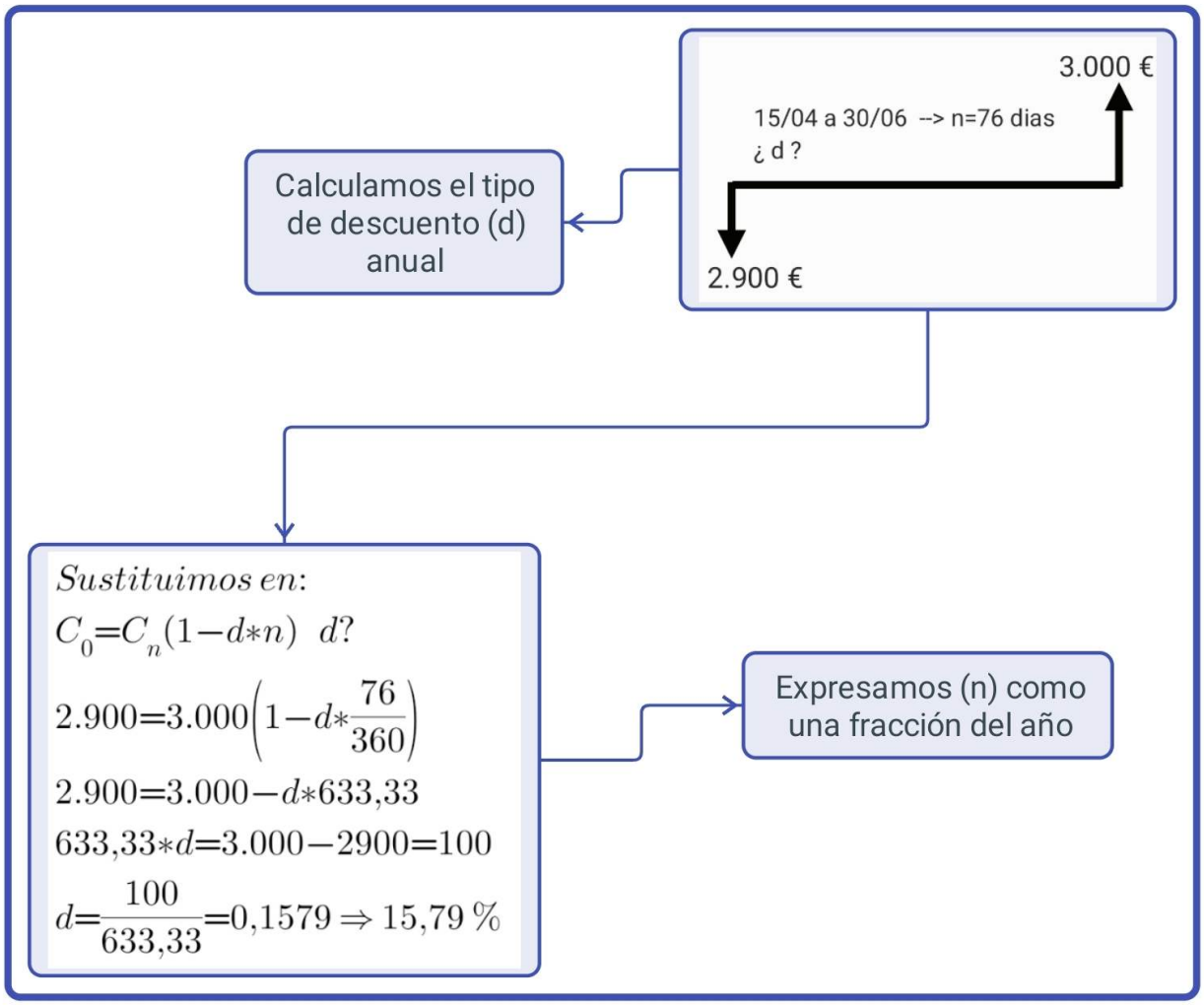
En los cuatro ejemplos siguientes utilizamos solo tipos de descuento (d). En la práctica bancaria también se aplican comisiones por negociación y gastos. Un ejemplo más completo, con el tipo de descuento y comisiones, lo veremos más adelante, en el mapa número (80).

1.- Calcula al 31 de octubre el valor actual de una letra que vence el 30 de diciembre; nominal de 10.000 €, al tipo de descuento del 9 %.



En el diagrama se indican los términos conocidos y la incógnita es el valor descontado o valor actual de la letra. Para su cálculo se emplea la fórmula principal del descuento comercial.

2.- El 15 de abril el banco nos abona 2.900 € por el descuento de un pagaré de 3.000 € que vence el 30 de junio. ¿Cuál es el tipo de descuento?

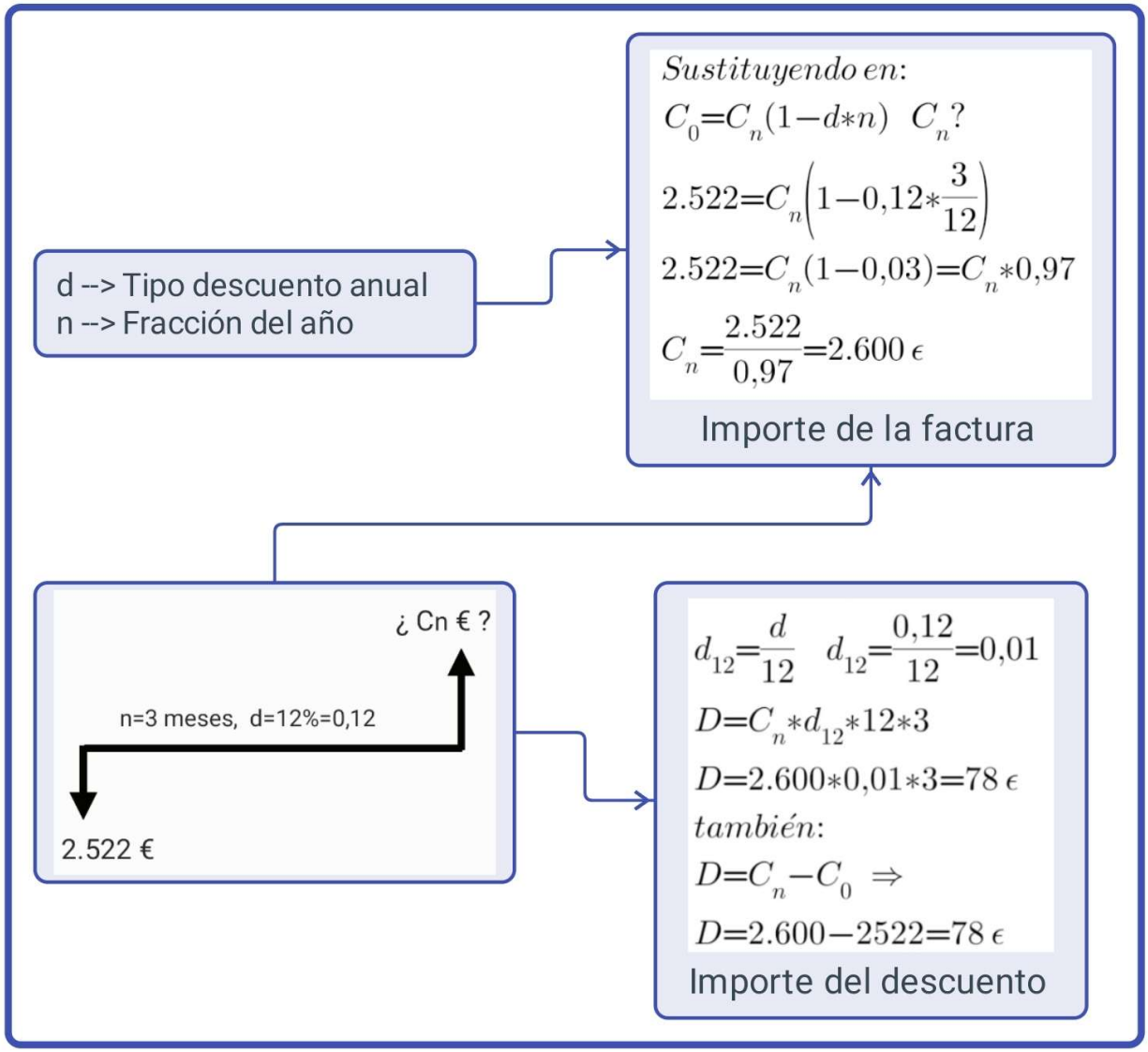


Ahora la incógnita es el tipo de descuento (d). Expresamos el tiempo (n) en años (como una fracción del año), por lo tanto, el tipo de descuento calculado también será anual para mantener la misma referencia temporal.

Otra forma de resolver el problema es calcular el tipo de descuento diario y despues hallar el equivalente anual multiplicando por 360.

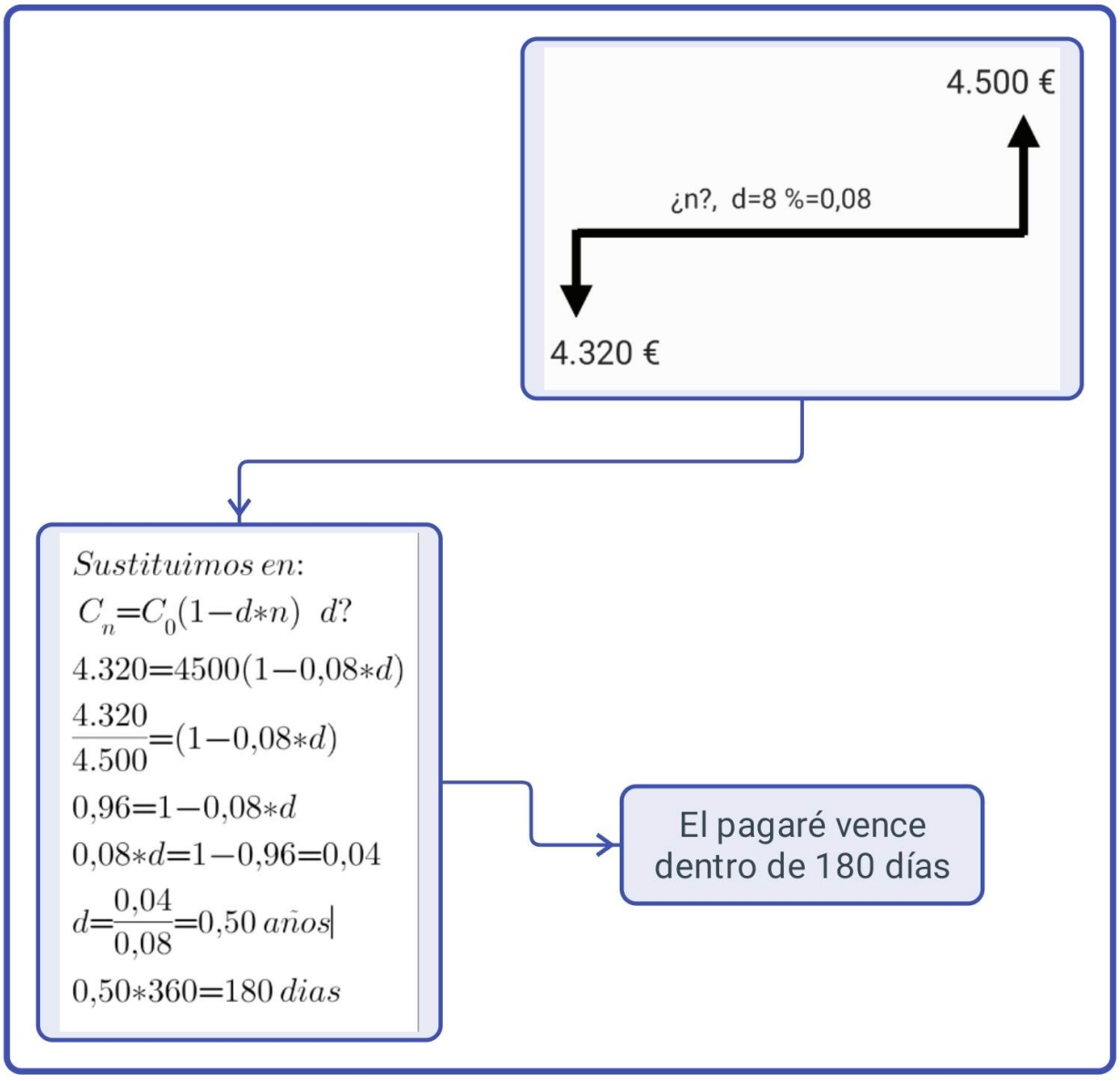
Para calcular numeros de dias entre fechas con calculadora y con Excel, ver los capitulos 99 y 100 de este libro.

3.- Un comerciante solicitó el anticipo de una factura que vence dentro de 3 meses, por la cual el banco le abonó 2.481,25 €. El tipo de descuento comercial aplicado es el 12 %. ¿De cuánto es la factura? Calcula el importe del descuento utilizando tipo de descuento fraccionado.



Hay que resolver dos cuestiones. Primero el nominal de la factura C_n y después el importe del descuento.

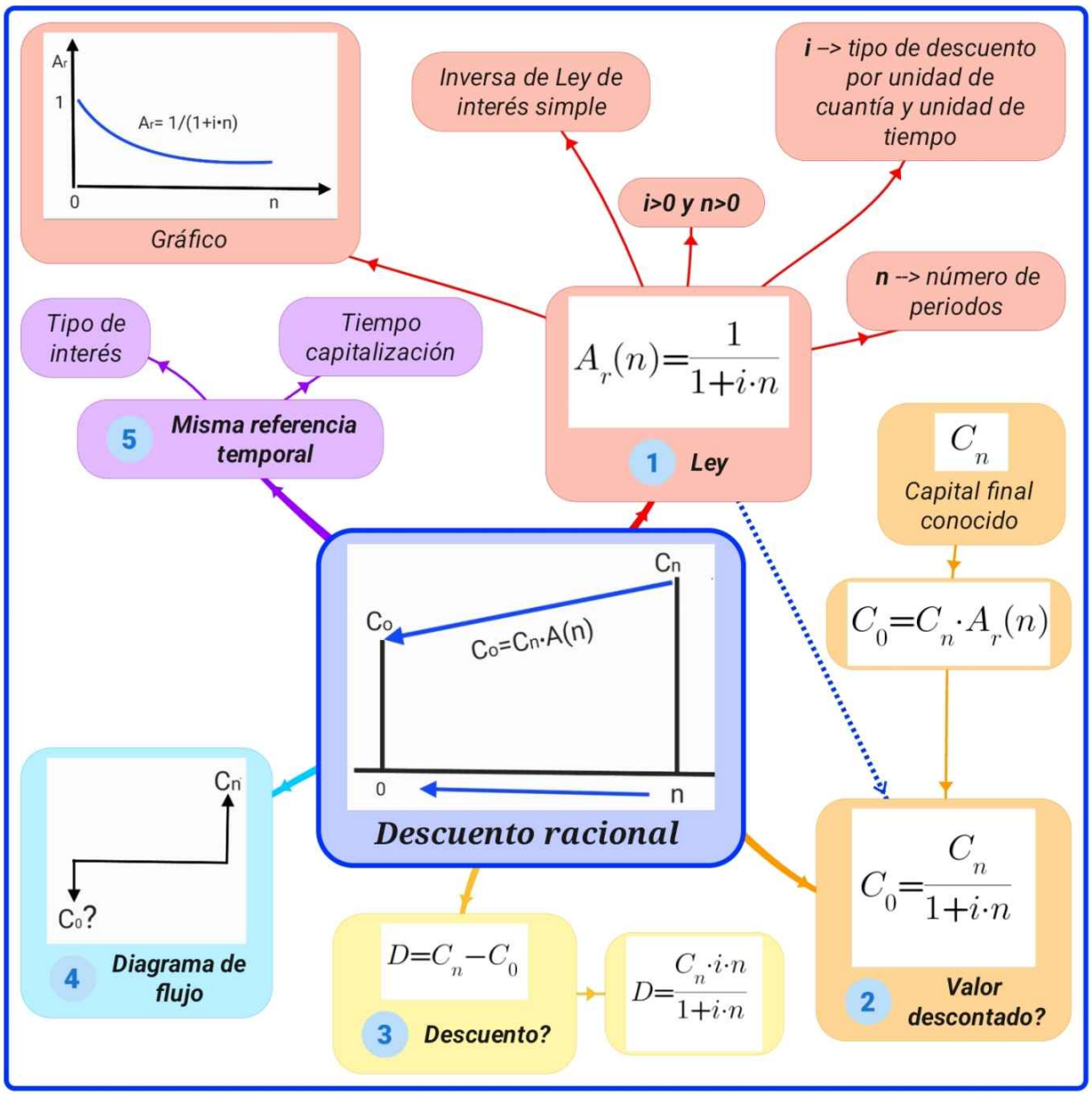
4.- El banco nos abonó en cuenta 4.320 € por el descuento de un pagaré de 4.500 €, liquidado al 8 % anual ¿En cuántos días vence el pagaré?



En este ejemplo tenemos que calcular el tiempo. Aplicamos el tipo de descuento (d) anual, por lo que el plazo nos vendrá dado en años. Como se trata de una fracción del año, tenemos que convertirlo en días tomando como referencia el año comercial, habitual en las operaciones de descuento comercial.

***

38 Ley de descuento racional



La ley de descuento racional, al igual que el resto de las leyes de descuento, calcula la proyección de un capital C_n en otro momento anterior. El resultado es C_0.

(1) **Ley unitaria.** $A_r(n)$ es la ley unitaria de descuento racional. En la fórmula, el interés y el tiempo interno de las operaciones son

positivos. El interés (i) es el descuento por unidad de capital y unidad de tiempo, y (n) el número de períodos. Es la inversa de la capitalización simple, por ello los conceptos de interés y descuento son equivalentes, motivo por el cual utilizamos como notación: (i) en vez de (d) usada en descuento comercial.

La representación gráfica de la ley, que indica en las abscisas el tiempo interno y en las ordenadas el resultado del descontar una unidad de capital, es una curva decreciente con pendiente negativa.

(2) **Valor descontado.** El valor descontado C_0, es igual a la ley $A_r(n)$ unitaria multiplicada por el capital final C_n, conocido. Como ya indicamos es la inversa de la capitalización simple y, por lo tanto, la fórmula es el resultado de despejar C_0 en la capitalización simple.

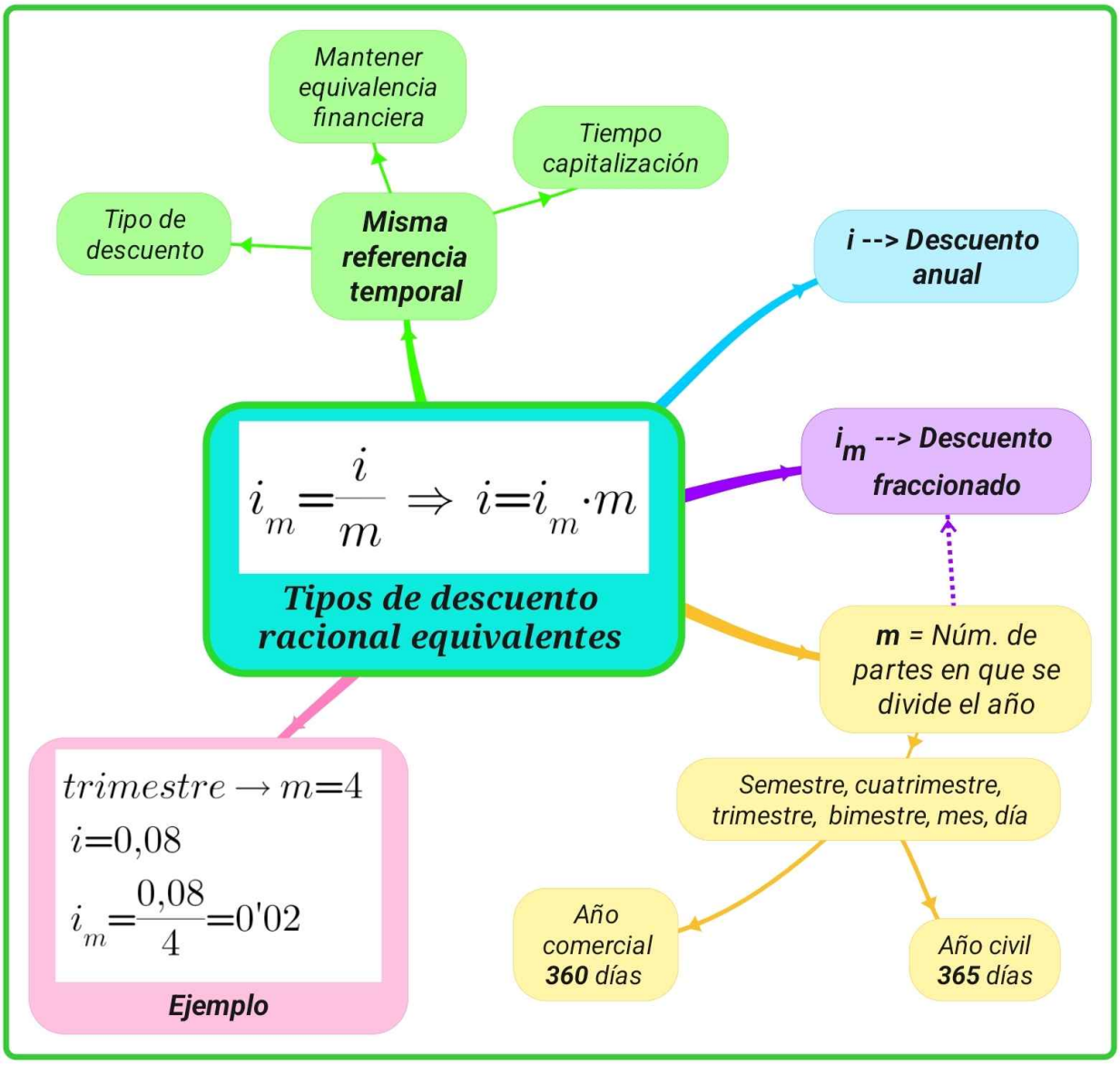
(3) **Descuento.** Otra variable importante es el importe del descuento, diferencia entre el capital final y el inicial $D=C_n-C_0$, o en la fórmula indicada en esta rama, el resultado de sustituir las variables conocidas por sus valores numéricos.

(4) **Diagrama.** Las operaciones de descuento solemos representarlas en un diagrama desde el punto de vista del acreedor que financia una operación comercial a corto plazo contra la entrega de un documento de cambio. El diagrama ejemplo es una operación simple (un solo capital). La flecha final, hacia arriba, representa el capital que se cobrará en una fecha futura, mientras que la flecha inicial, hacia abajo, representa el valor actual de dicho capital.

(5) **Misma referencia temporal**. El tipo de interés y período de capitalización ha de expresarse en la misma unidad temporal. De lo contrario es necesario calcular el tipo de interés equivalente, lo que veremos en el mapa siguiente.

***

39 Tipos de descuento racional equivalentes

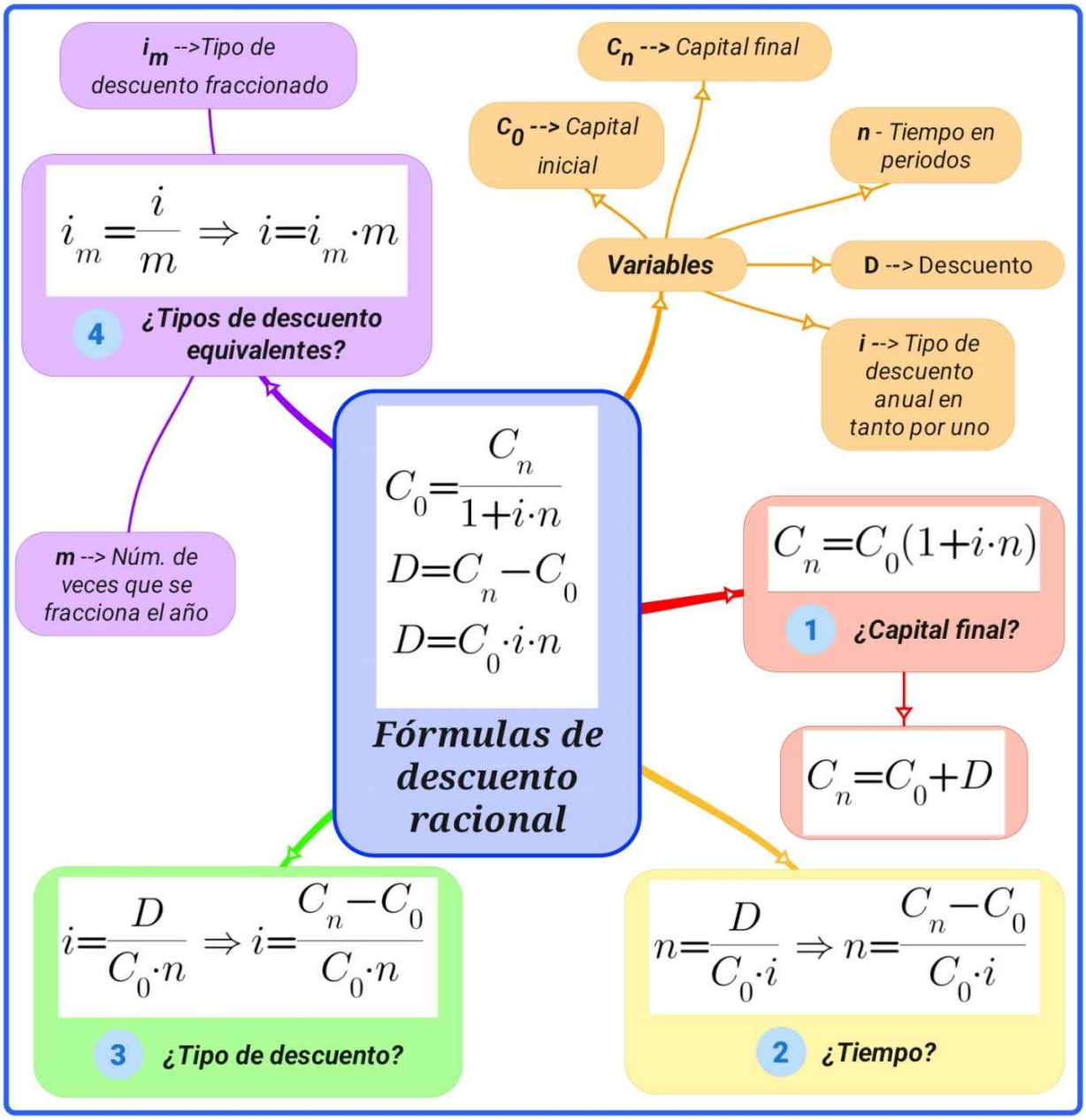


La explicación sobre los tipos de interés equivalentes en el descuento racional es la misma que la efectuada para el interés simple (estudiado en el mapa número 23), dado que se trata de leyes inversas, la una de la otra.

Al tipo de descuento le llamamos (i) por ser equivalente al tipo de interés.

***

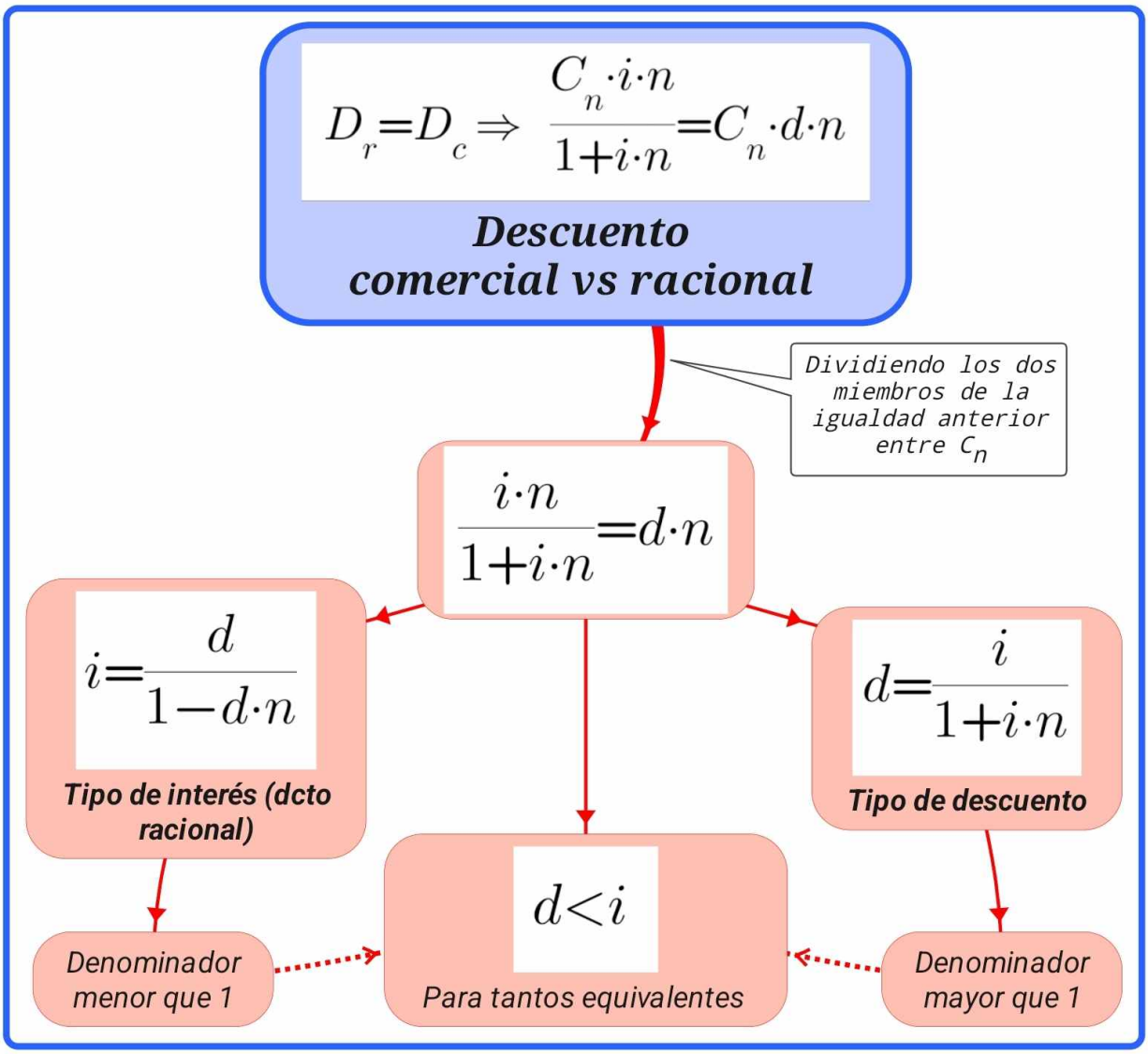
40 Fórmulas de descuento racional



Este es un resumen de las fórmulas de descuento racional, que se obtienen desde la fórmula principal de descuento. Dado que el interés simple y el descuento racional son inversos, las fórmulas para obtener las mismas variables son iguales, solo hay que sustituir en algunos casos el interés (I) por el descuento (D). Por ello este mapa es similar al número (24).

***

41 Descuento comercial vs racional



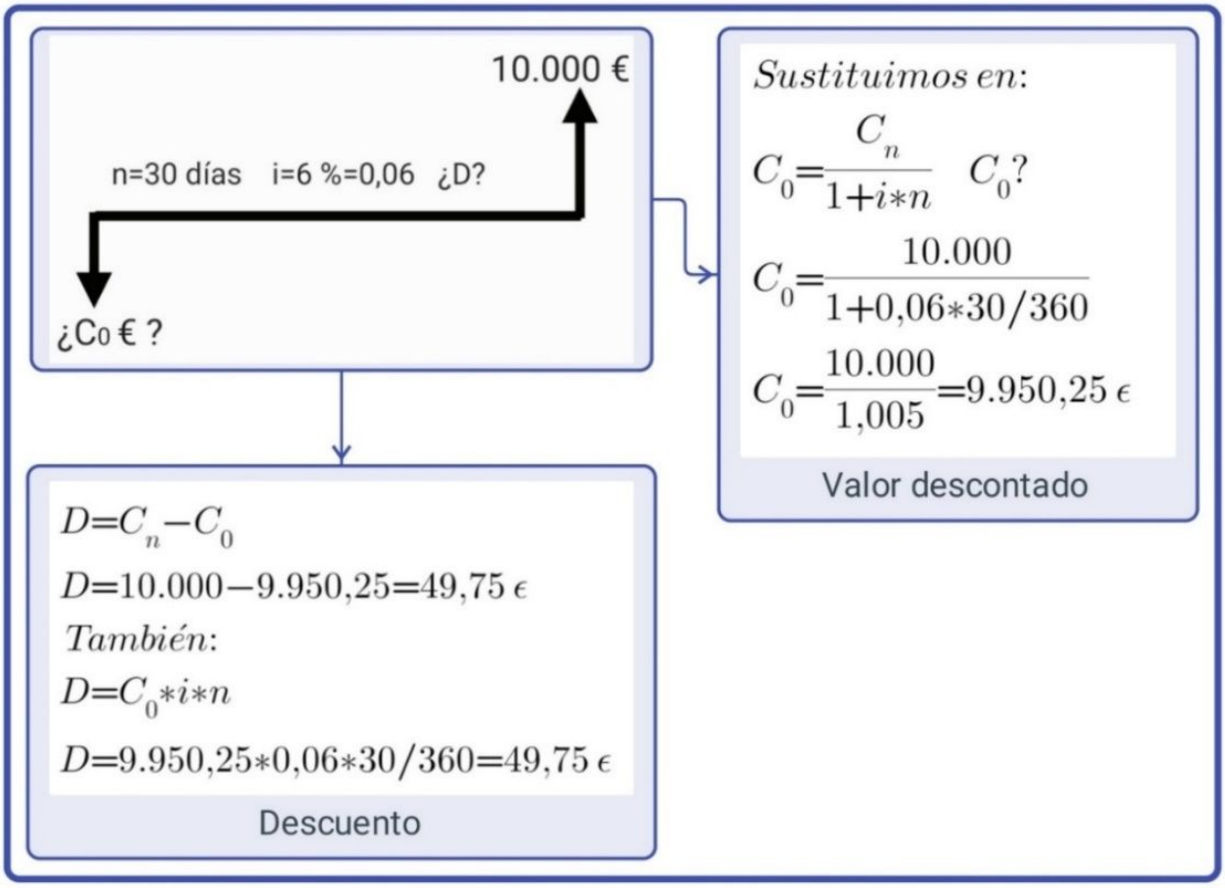
Es interesante comparar el descuento racional con el comercial. Para ello, igualamos las fórmulas del descuento comercial y del racional, y buscamos los tantos de descuento (d) e interés (i), equivalentes, que generan la misma cuantía de descuento.

El resultado es que el tipo de descuento (d) será inferior al tipo de interés (i). El denominador de la ecuación donde está despejado el tipo de interés es menor que uno y la del tipo de descuento es superior a uno, y esto implica que d<i para descuentos equivalentes.

***

42 Ejemplos sobre descuento racional

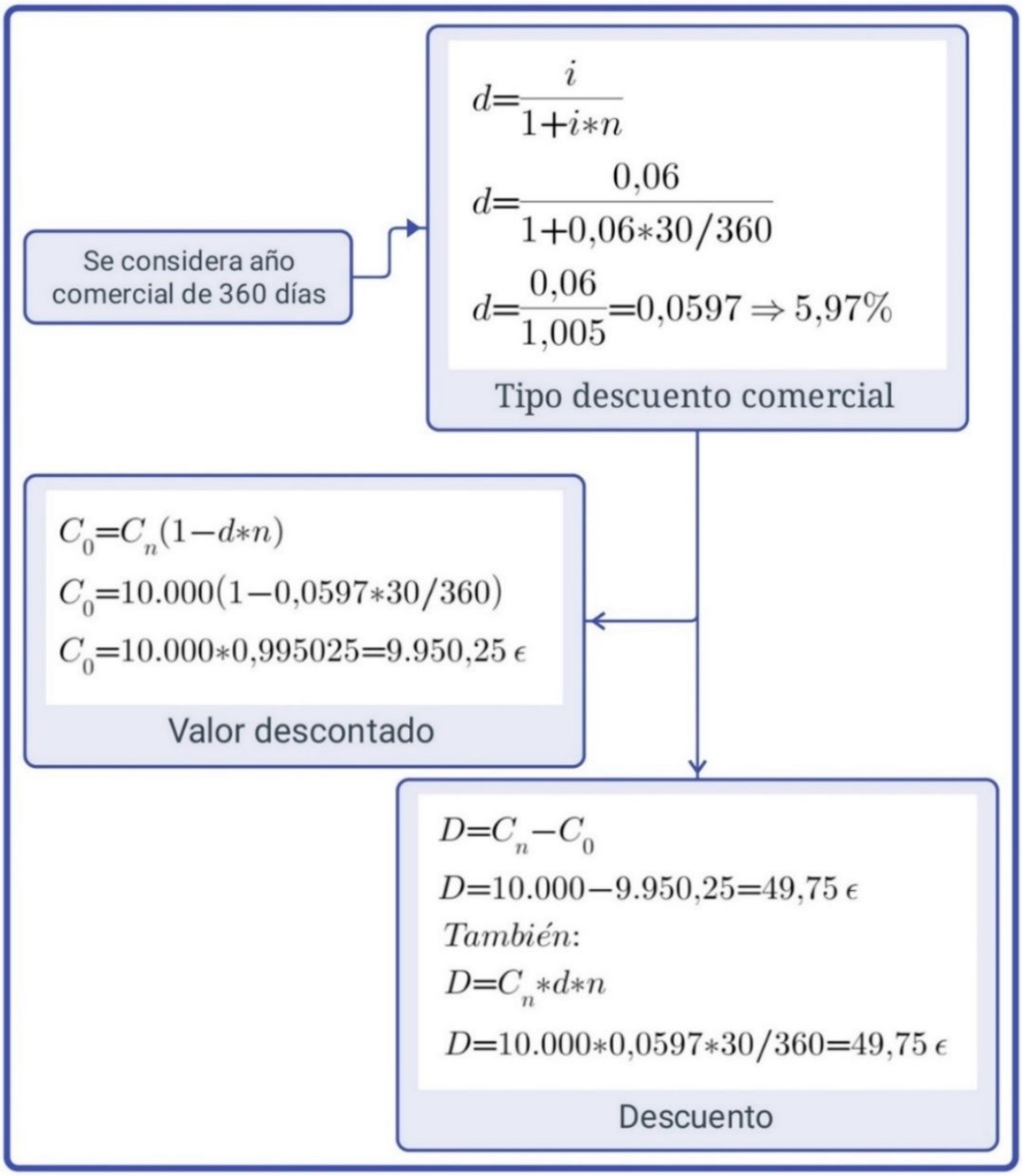
1.- ¿Cuánto es el valor descontado y el descuento de una letra de 10.000 € con vencimiento dentro de 30 días al 6 % de tipo de descuento racional (interés)?



Se plantean dos cuestiones. Primero, calcular el valor descontado, que obtenemos directamente aplicando la fórmula. Y segundo, calcular el importe del descuento como la diferencia entre el nominal y el valor descontado.

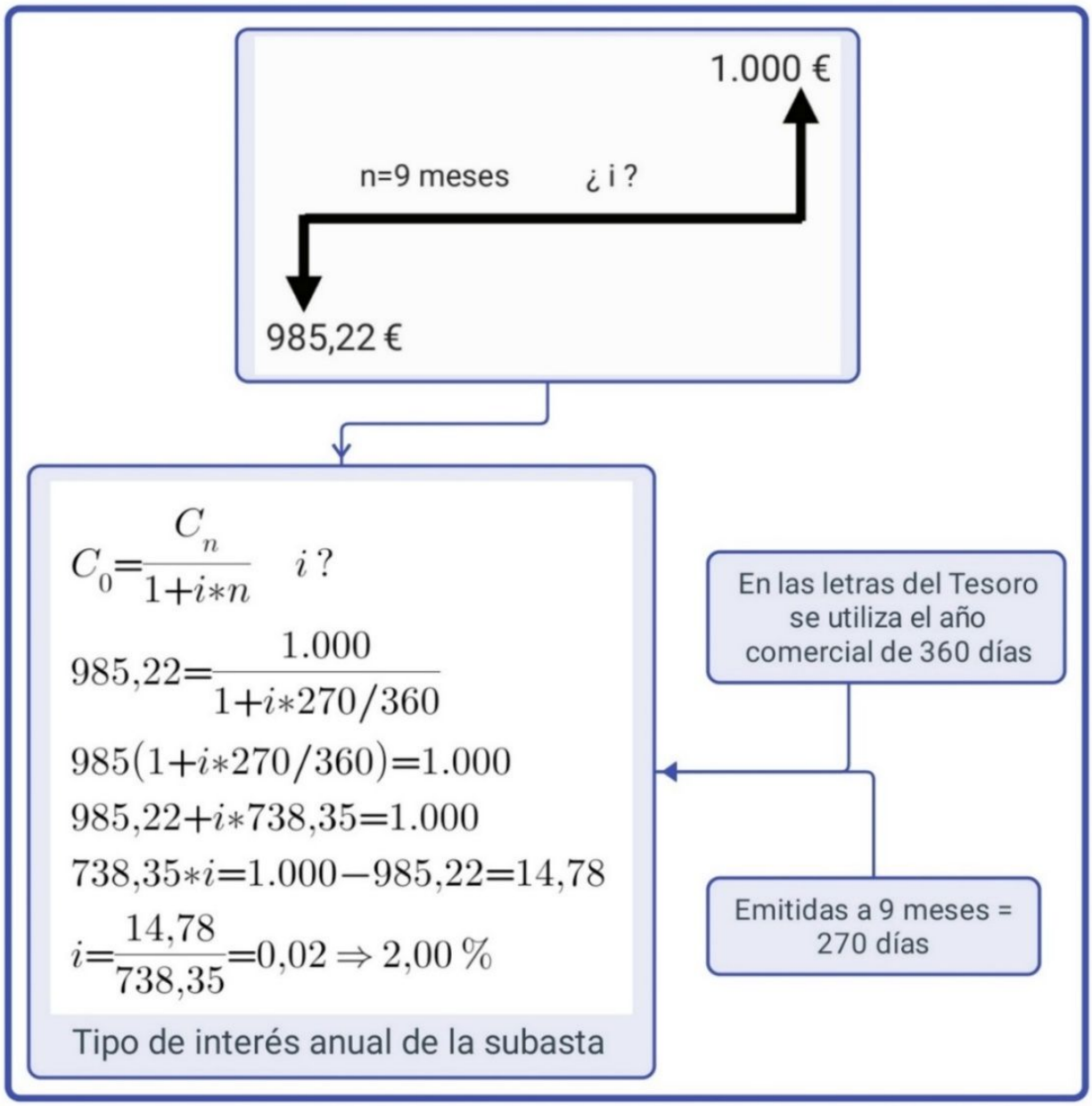
El descuento también se puede calcular aplicando la fórmula indicada en la rama (3) del mapa (38).

2.- ¿Cuál es el tipo de descuento comercial equivalente al tipo de descuento racional (interés) del ejemplo anterior? Y con el resultado, calcula el valor efectivo y valor descontado.

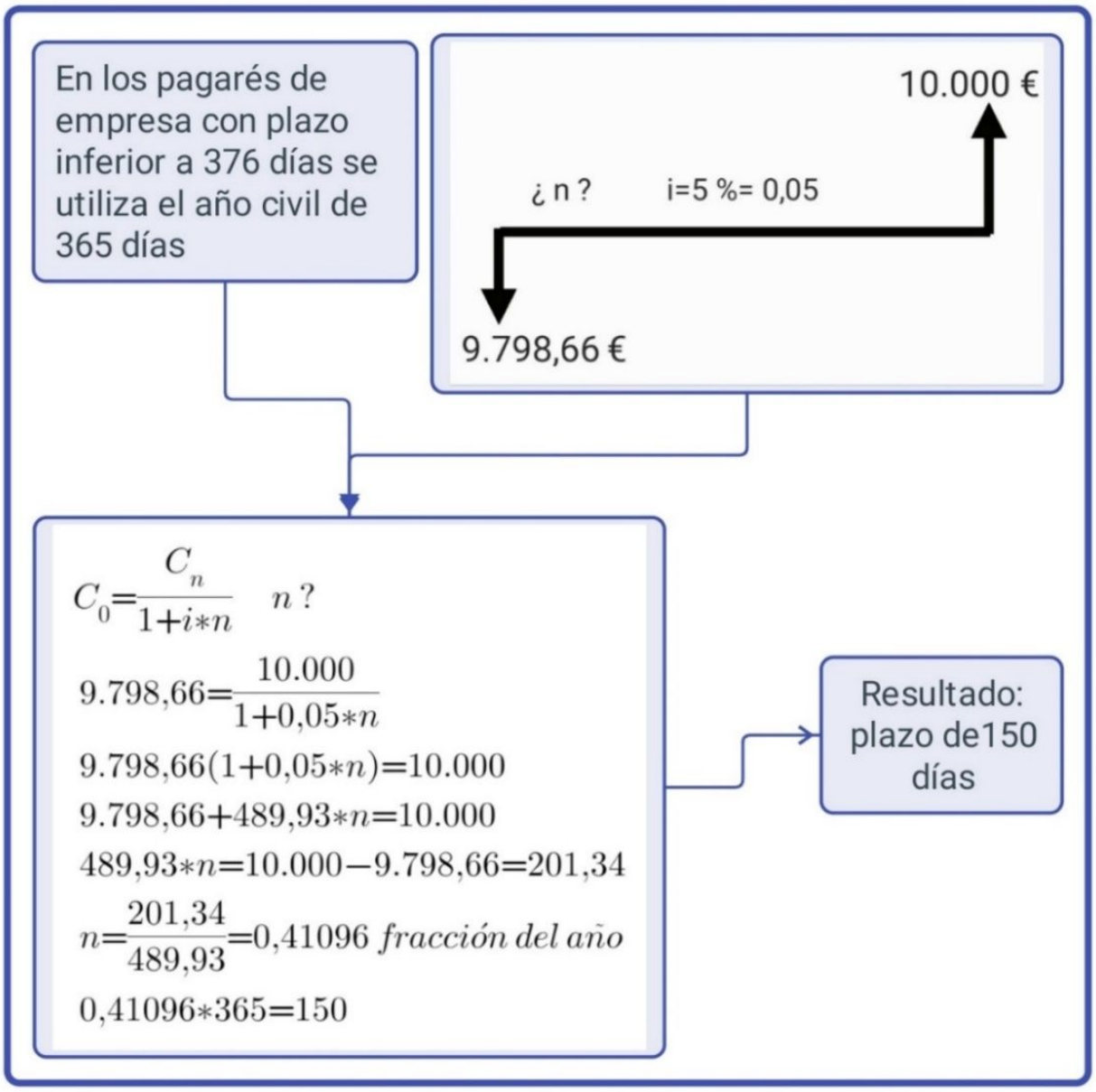


Aplicamos la fórmula explicada en el mapa (41).

3.- Realizamos una suscripción de letras del Tesoro de 1.000 € de nominal, emitidas a 9 meses por importe de $985{,}22$ € cada una. ¿Cuál es el tipo de interés anual de la subasta?

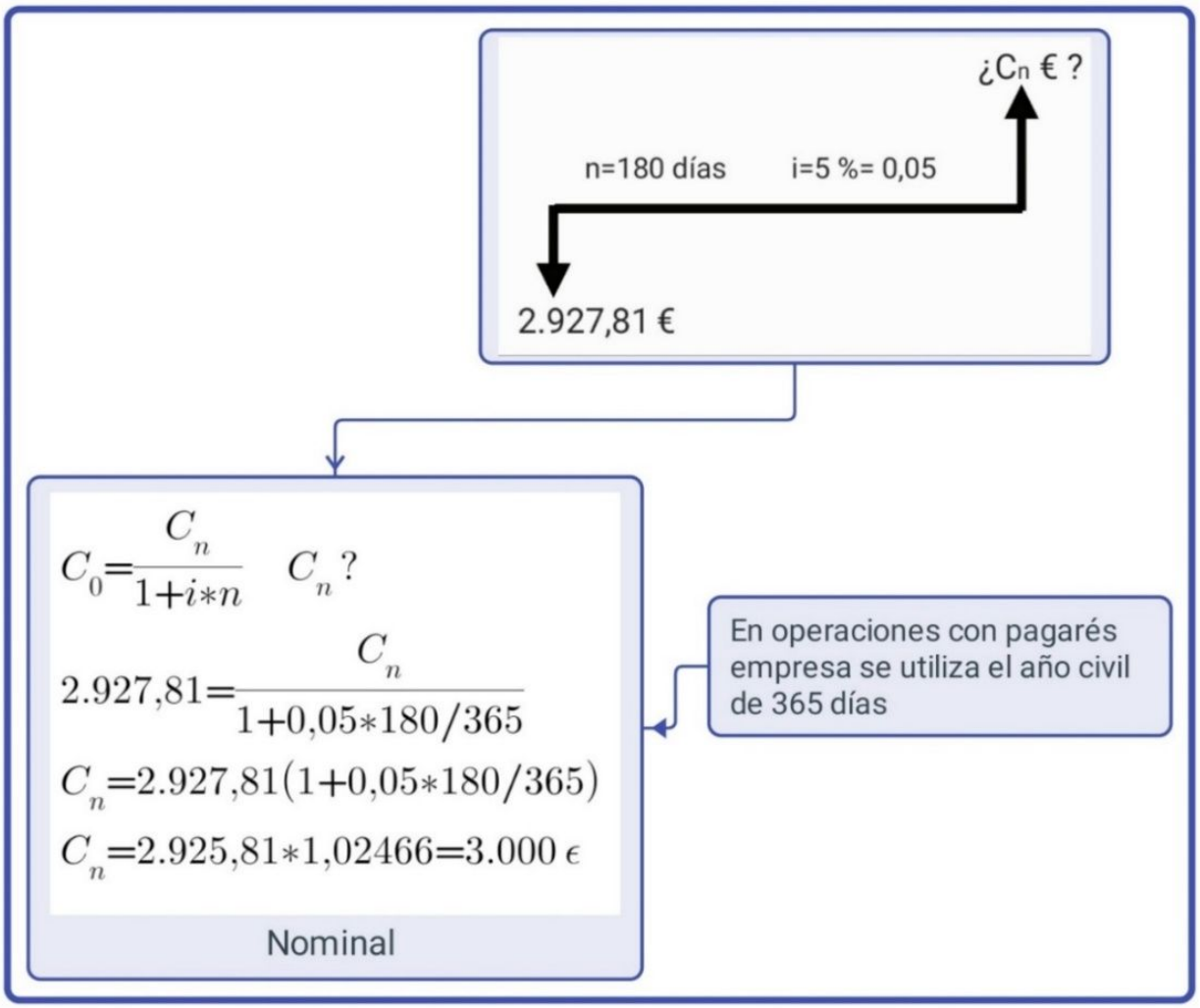


4.- Compramos un pagaré de empresa de $10.000 €$ de nominal, por $9.798{,}66 €$, al $5\ \%$ de interés. Calcula el plazo de la operación.



En la fórmula, aplicamos tipo de interés anual, por lo tanto, el resultado del cálculo del plazo de la operación (n) es en años. Y como es una fracción del año, lo convertimos después en días.

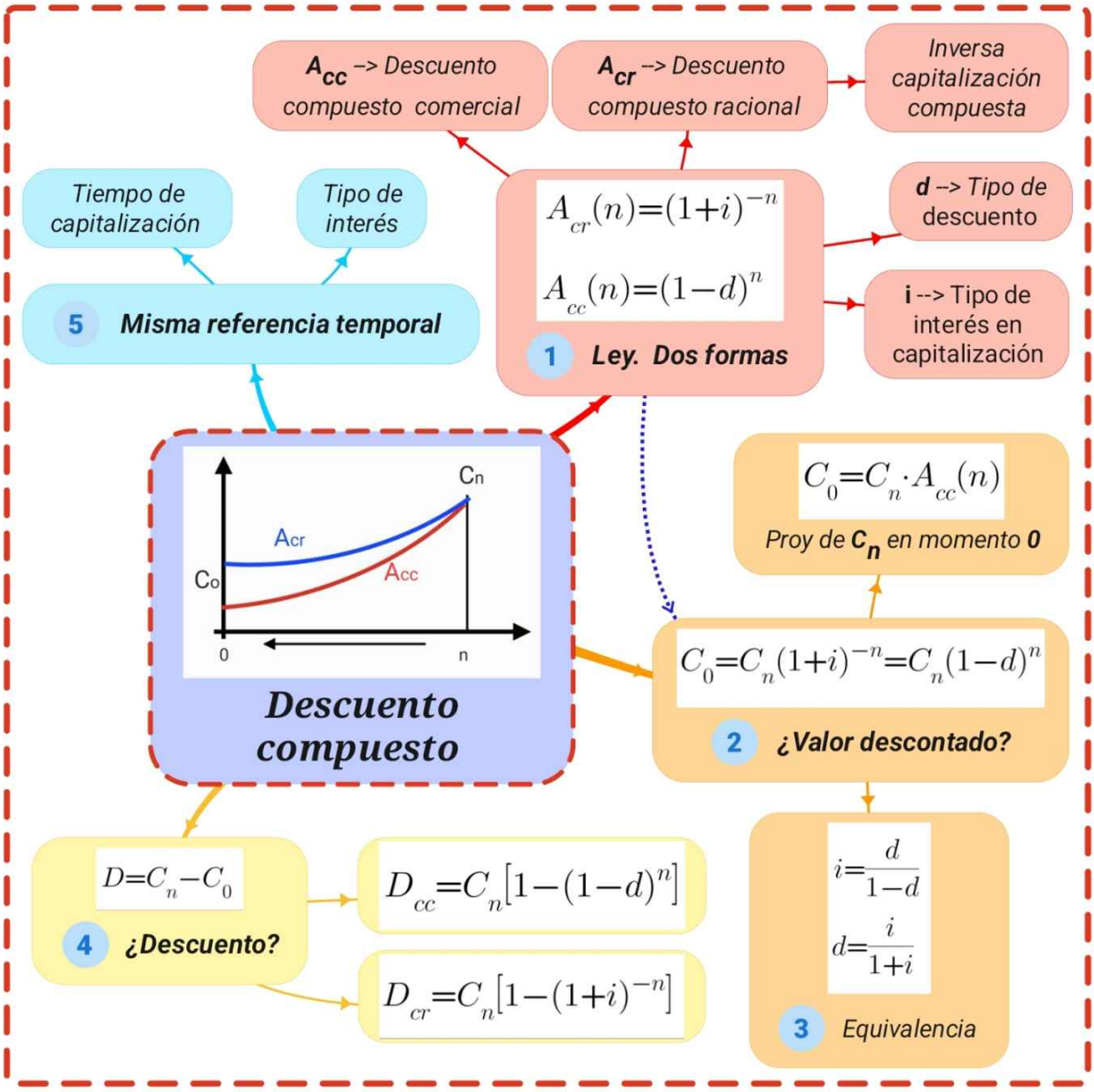
5.- Hemos realizado una inversión en pagarés de empresa, desembolsando por cada uno 2.927,81 €, emitidos a 180 días al 5,00 % de rentabilidad de emisión. ¿De cuánto es su nominal?



La incógnita es el valor nominal. Sustituimos en la ecuación de descuento el valor numérico de los parámetros conocidos, y a continuación, despejamos y calculamos C_n.

***

43 Descuento compuesto



En la imagen central, la curva roja representa el descuento compuesto comercial A_{cc} y la azul el descuento compuesto racional A_{cr}. En el eje horizontal se representa el tiempo (n). El valor descontado para i=d es inferior en el caso del descuento compuesto comercial, por ello la línea roja se encuentra por debajo de la azul en el gráfico. Donde, (i) es tipo de interés y (d) el tipo de descuento.

(1) **Leyes unitarias.** En el descuento compuesto, la ley unitaria tiene dos expresiones matemáticas diferentes. Una, $A_{cr}(n)$, que es la inversa de la capitalización compuesta y utiliza el parámetro (i=tipo de interés de capitalización). Y otra, A_{cc}, que utiliza el parámetro (d=tipo de descuento compuesto).

(2) **Valor descontado.** El valor descontado se obtiene multiplicando el capital C_n por cada una de las leyes unitarias indicadas en (1). El resultado es la proyección de C_n en el momento (0).

A partir de la equivalencia que expresan estas ecuaciones, podemos obtener la relación entre los dos parámetros (i) y (d).

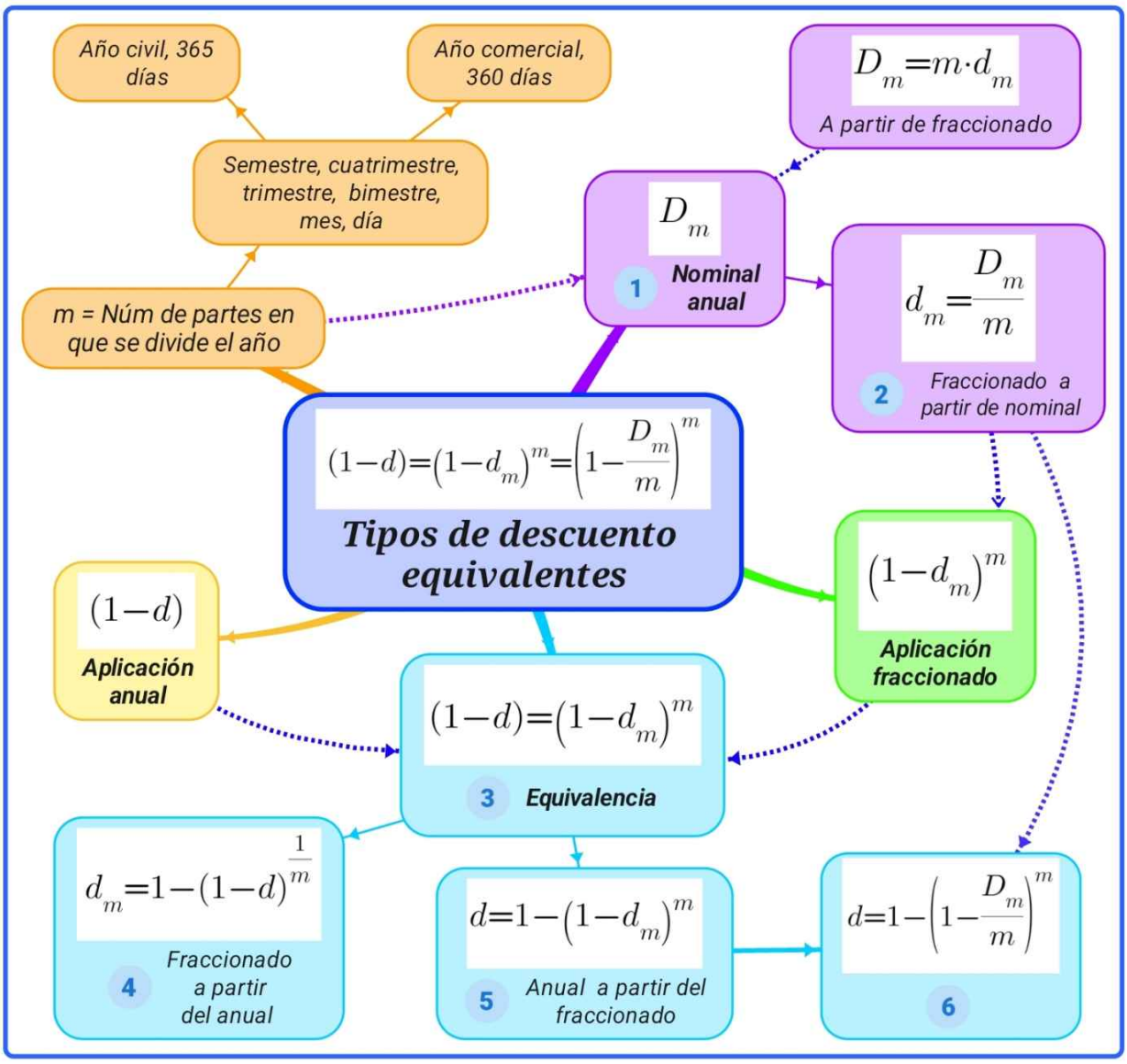
(3) **Equivalencia.** Despejando en la ecuación (2), obtenemos la equivalencia ente (i) y (d), i=d/(1-d). Y, d=i/(1+i). Dado un tipo de descuento (d), el tipo de interés equivalente (i) será un valor numéricamente mayor, porque en la fórmula de (i), el divisor (1-d) es un número menor que la unidad, y en la fórmula de (d), el divisor (1+d) es mayor que la unidad. Para cuantías de descuento iguales: i>d. La ecuación de equivalencia entre (i) y (d) es independiente del tiempo.

(4) **Descuento.** El descuento es la diferencia entre el nominal y el valor descontado, $D=C_n-C_0$. Sustituyendo C_0, por la expresión (2), obtenemos las fórmulas de descuento para cada uno de los tipos de interés y descuento.

(5) **Misma referencia temporal**. Por último, al igual que en el resto de leyes financieras, el período de capitalización o de descuento y el tipo de interés o descuento han de estar expresados en la misma unidad temporal.

***

44 Tipos de descuento compuesto equivalentes



Dado que la unidad de medida del período de descuento y el tipo de descuento tienen que ser homogéneos, es necesario establecer la relación entre las siguientes modalidades de tipos de descuento para calcular su equivalencia. Esta se resume en la ecuación que figura en la parte central del mapa.

(1) **Nominal.** Por una parte, tenemos el tipo de descuento nominal anual, que es una proyección anual del tipo de descuento

fraccionado.

(2) **Fraccionado**. Por lo tanto, el tipo de descuento fraccionado es el nominal dividido entre la fracción del año (m). Existen tantas fracciones como se pueda dividir el año, siendo las más habituales las siguientes: semestres, cuatrimestres, trimestres, bimestres, meses y días.

(3) **Equivalencia**. Para obtener los tipos de descuento equivalentes establecemos la ecuación de equivalencia financiera $(1-d) = (1-d_m)^m$. El primer miembro es el descuento anual y el segundo el descuento fraccionado. A partir de esta igualdad despejamos las fórmulas del tipo de descuento anual y del tipo de descuento fraccionado.

(4) **Fraccionado a partir del anual**. En esta fórmula despejamos el descuento fraccionado d_m a partir del anual (d).

(5) **Anual a partir del fraccionado**. Aquí, despejamos el descuento anual (d) a partir del fraccionado d_m.

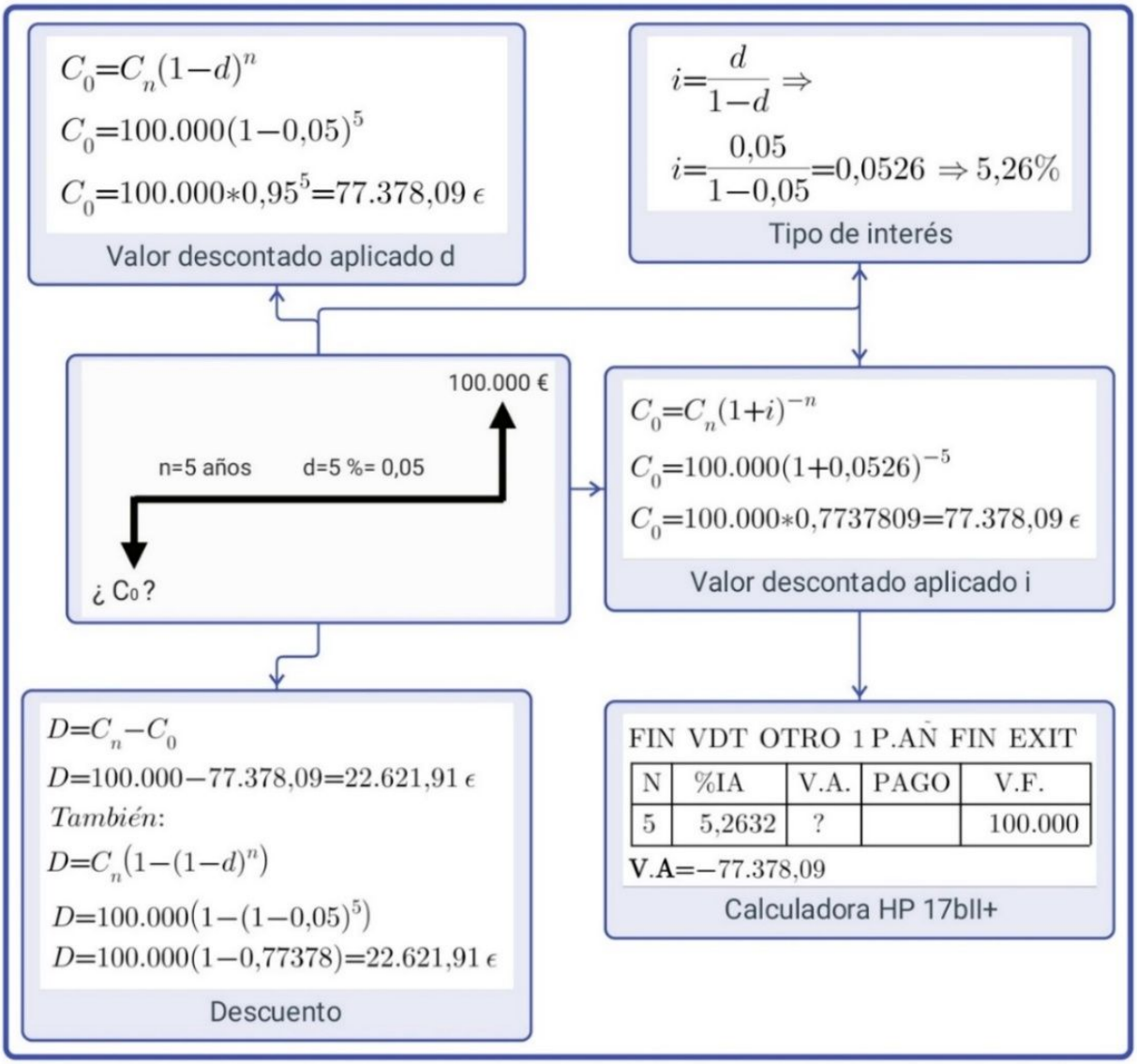
(6) **Anual a partir del nominal**. Sustituyendo en la ecuación (5) el tipo de descuento fraccionado d_m por la expresión (2), obtenemos la fórmula para el tipo de descuento anual a partir del nominal D_m y la fracción del año (m).

***

45 Ejemplos sobre descuento compuesto

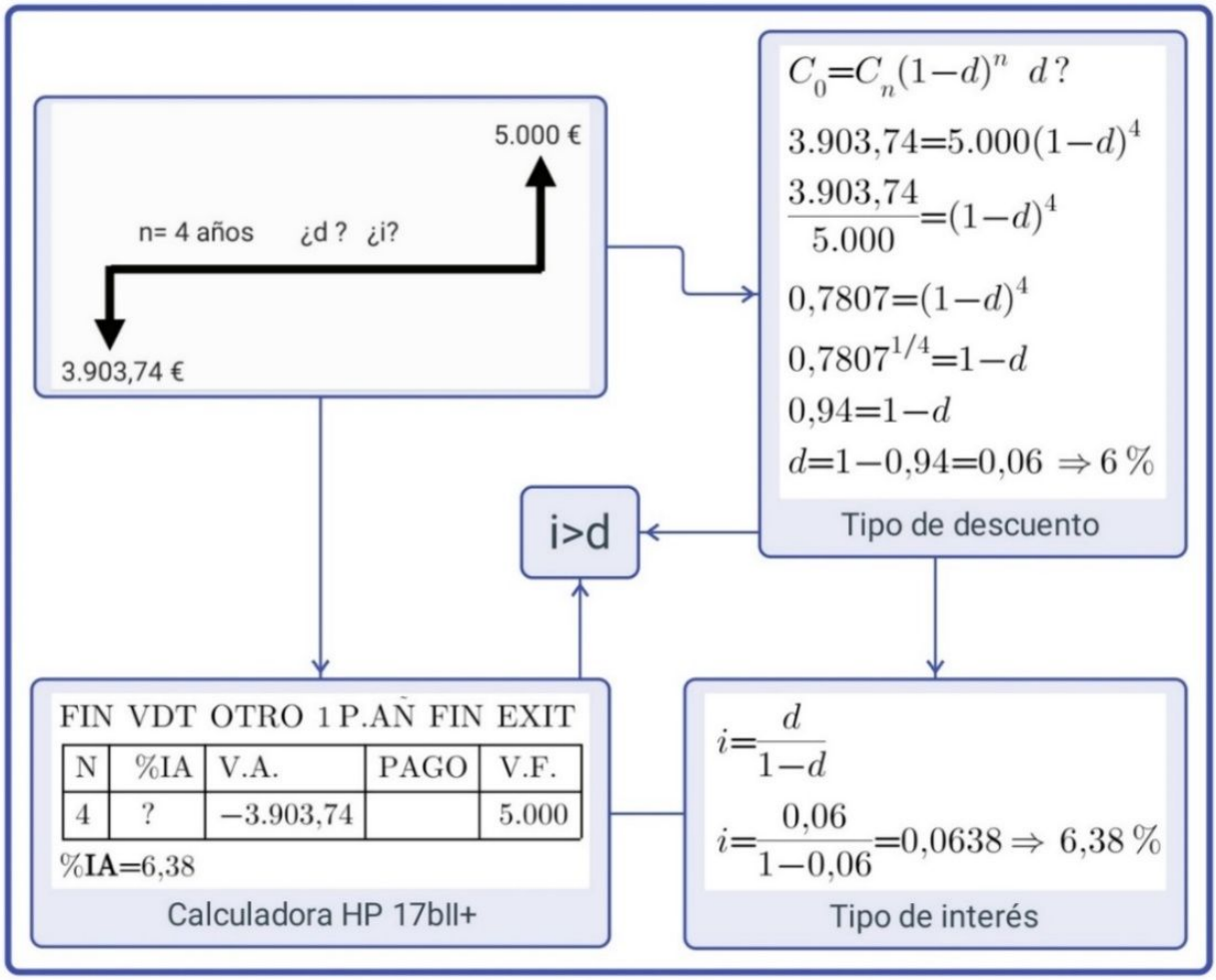
1.- Dado un capital de 100.000 € con vencimiento dentro de 5 años:

- ✓ **Calcula el valor descontado y el descuento efectuado al tipo anual de descuento del 5 %.**
- ✓ **¿Cuál es el tipo anual de descuento racional?**
- ✓ **Calcula el valor descontado y descuento con el tipo de descuento racional.**



El enunciado nos indica el tipo de descuento (d). Con la fórmula de equivalencia entre tipos de descuento, calculamos (i). Obtenemos el valor descontado con las dos modalidades de descuento, que lógicamente generan el mismo resultado. La calculadora utiliza como argumento el tipo de interés (i).

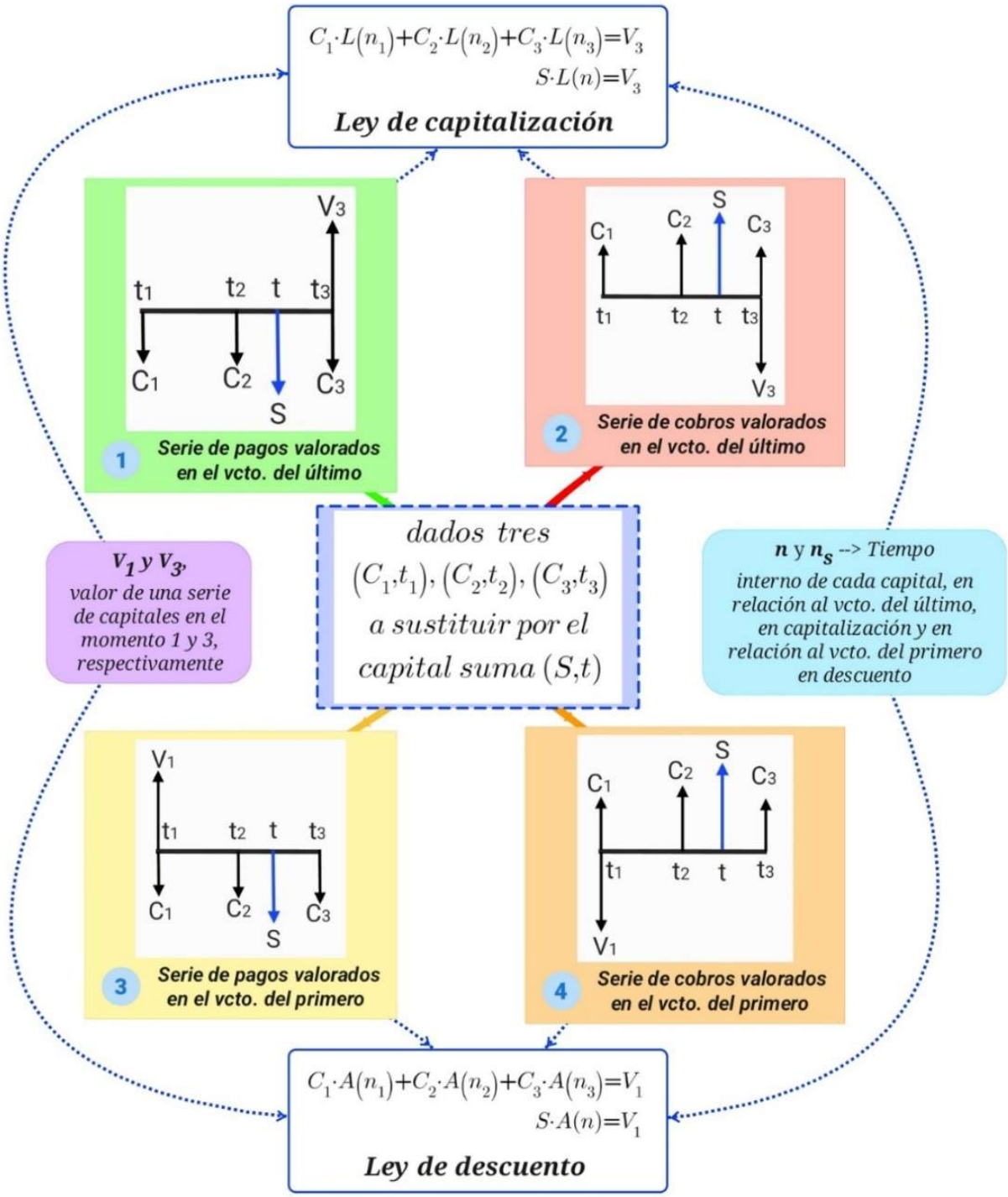
2.- El valor descontado de un capital de 5.000 € con vencimiento dentro de 4 años, es de 3.903,74 €. ¿Cuál es el tipo de descuento anual y el tipo de interés anual que se ha aplicado?



En este caso se trata de obtener ambos tipos de descuento. La solución, calculamos uno de ellos y a partir del resultado calculamos el otro aplicando la fórmula de equivalencia entre ambos.

***

46 Suma de capitales (visión general)

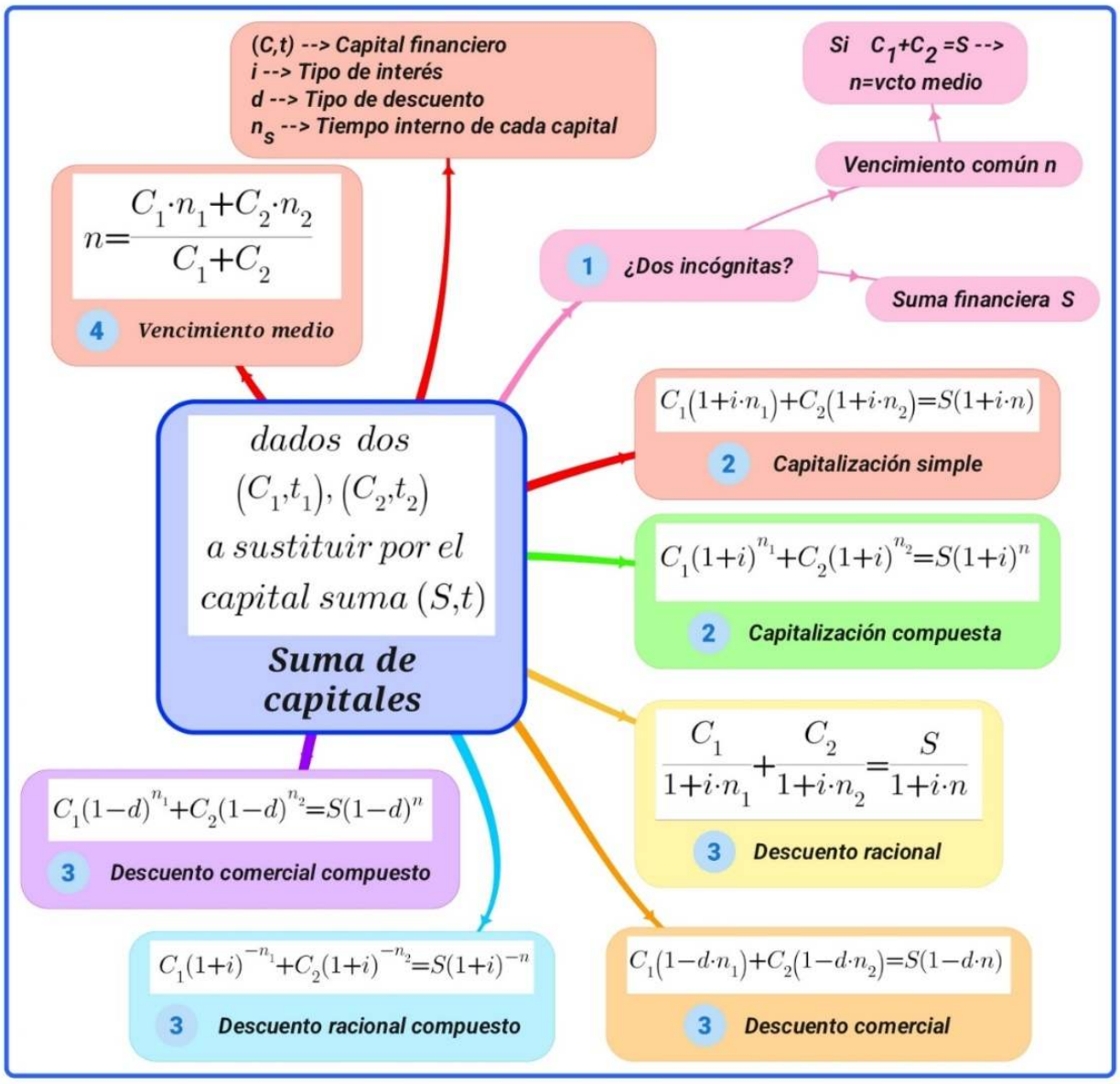


Este es un resumen de lo estudiado en los mapas del (9) al (13), con leyes de capitalización y descuento genéricas. En los capítulos

siguientes lo veremos aplicado con las leyes financieras clásicas estudiadas.

***

47 Suma de capitales con leyes clásicas



En los mapas anteriores hemos hablado de la suma financiera con leyes financieras genéricas. Ahora, una vez estudiadas las leyes financieras clásicas, desarrollamos sus ecuaciones de suma financiera respectivas. Con dos capitales financieros, para simplificar la explicación.

La equivalencia financiera en estas ecuaciones consiste en que la suma de la proyección de varios capitales en un momento

determinado tiene que ser igual a la proyección del capital suma en el mismo instante, mediante la aplicación de una ley financiera determinada.

Al operar con varios capitales, estas son operaciones financieras complejas.

(1) **Hay dos incógnitas.** Una, el capital suma, cuando conocemos el vencimiento común y la otra, el vencimiento común, cuando conocemos el capital suma.

Un caso particular del vencimiento común, llamado vencimiento medio, es cuando el capital suma es la suma aritmética de los capitales.

Para resolver los problemas sustituimos en las ecuaciones las variables conocidas, y calculamos el valor de la incógnita.

Hay que tener en cuenta que cuando calculamos (n), este expresa el tiempo interno del capital suma. Para determinar el vencimiento en formato de fecha habrá que sumar (n) a la fecha en que se realiza la valoración en operaciones de descuento y restar (n) en operaciones de capitalización.

(2) **Leyes de capitalización**. Estas son las ecuaciones para las distintas leyes de capitalización simple y compuesta. En las sumas financieras con leyes de capitalización se toma como referencia el vencimiento del último capital.

(3) **Leyes de descuento.** Y estas son las ecuaciones para las cuatro leyes de descuento, en las que se toma como referencia el vencimiento del primer capital.

(4) **Vencimiento medio**. En el caso de que la incógnita sea el vencimiento medio y las leyes sean de capitalización simple y descuento comercial, se puede utilizar esta fórmula para su cálculo, en donde el vencimiento medio es la media de los vencimientos ponderados por el plazo de los capitales. La fórmula nos indica que el

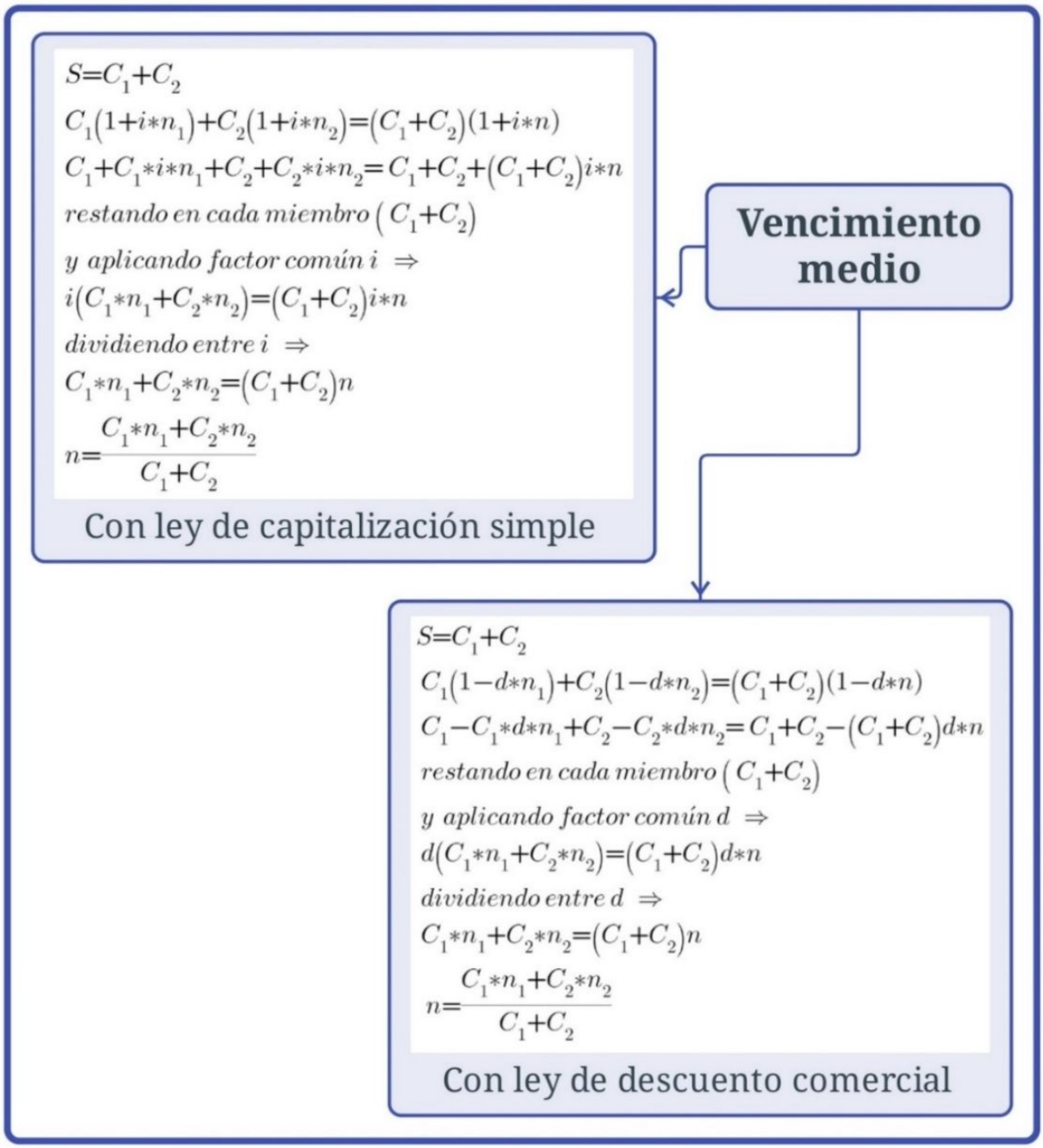
vencimiento medio, con dichas leyes, es independiente de tipo de interés o descuento.

Veremos la obtención de esta fórmula en el mapa siguiente.

***

48 Ejemplos de suma de capitales

1.- Desarrolla la fórmula de vencimiento medio de dos capitales, indicada en el mapa anterior con el número (4), con las leyes de descuento comercial y de capitalización simple, utilizando dos capitales (C_1 y C_2).



2.- Un cliente tiene previsto el pago de una factura en los siguientes plazos: 4.000 € a 60 días y 6.000 € a 90 días, pero tiene opción a elegir las modificaciones siguientes:

¿Cuánto es el importe de un pago único a los 75 días al tipo de descuento comercial del 10 % anual?

¿Cuál es el vencimiento medio de los dos capitales?

¿Cuál es el vencimiento común con un pago único de 9.955,31 €?

$n_1 = t_1 - t_1 \Rightarrow n_1 = 30 - 30 = 0$

$n_2 = t_2 - t_1 \Rightarrow n_2 = 90 - 30 = 60$

$n = 75 - 30 = 45$

Sustituyendo en:

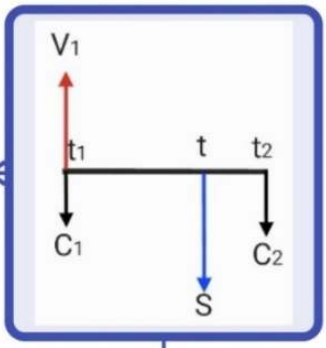
$$C_1\left(1 - \frac{n_1}{360} i\right) + C_2\left(1 - \frac{n_2}{360} i\right) = S\left(1 - \frac{n}{360} i\right)$$

$$4.000\left(1 - \frac{0}{360} 0{,}10\right) + 6.000\left(1 - \frac{60}{360} 0{,}10\right) = S\left(1 - \frac{45}{360} 0{,}10\right)$$

$$4.000 + 5.900 = S * 0{,}9875 \Rightarrow 9.900 = S * 0{,}9875$$

$$S = \frac{9.900}{0{,}9875} = 10.025{,}32\ €$$

Cantidad a pagar a los 75 días



$$9.900 = 9.955{,}31\left(1 - \frac{n}{360} 0{,}10\right)$$

$$\frac{9.900}{9.955{,}31} = 1 - \frac{n}{360} 0{,}10$$

$$0{,}99444 = 1 - \frac{n}{360} 0{,}10$$

$$358 = 360 - 0{,}10 * n$$

$$n = \frac{360 - 358}{0{,}10} = 20$$

$$t = t_1 + n \Rightarrow t = 30 + 20 = 50$$

Número de días para 9.955,31 €

Momento de referencia

vcmto. primer capital $t_1 = 30$

Sustituyendo en:

$$n = \frac{C_1 * n_1 + C_2 * n_2}{C_1 + C_2}$$

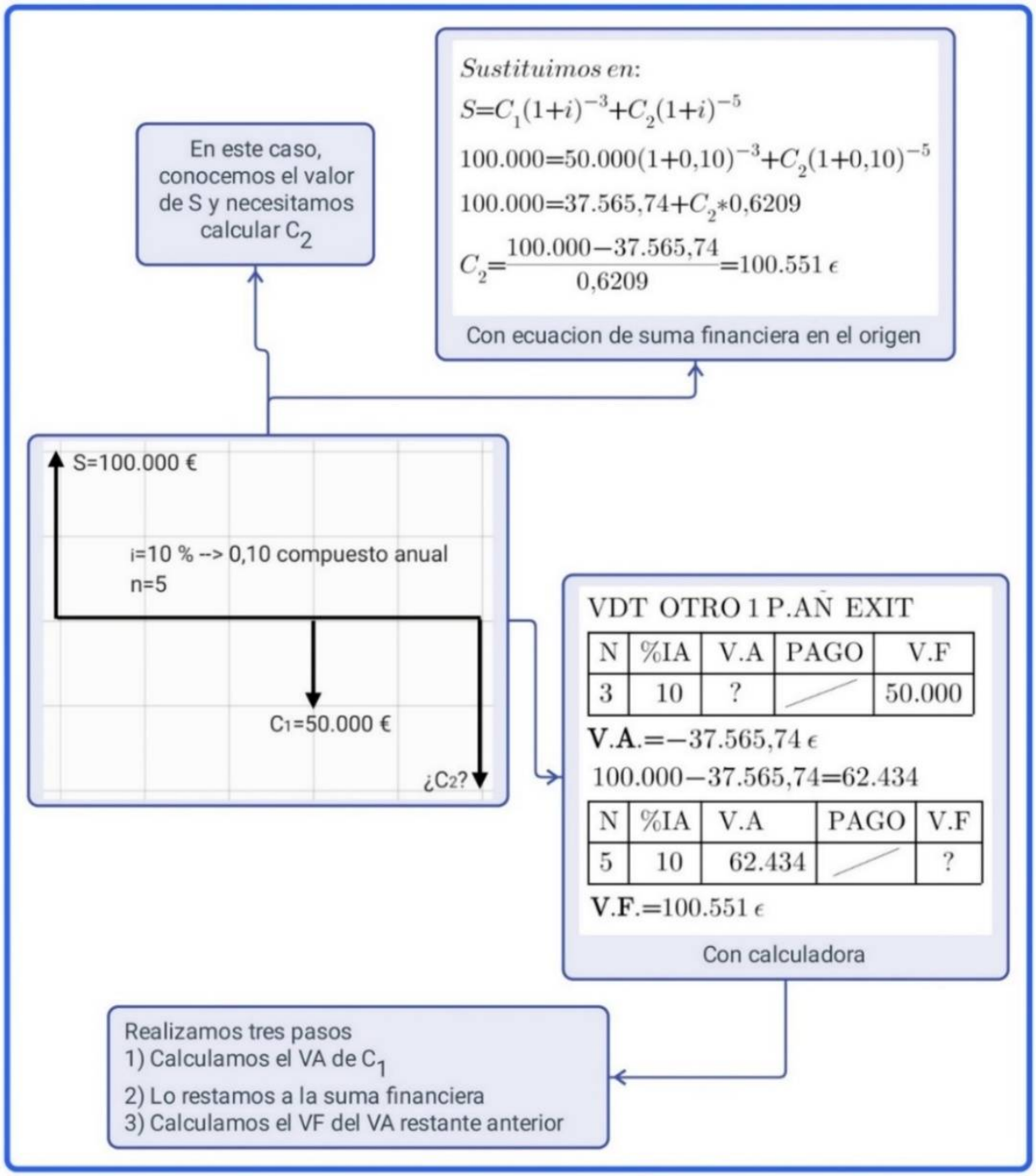
$$n = \frac{4.000(30 - 30) + 6.000(90 - 30)}{4.000 + 6.000} = 36$$

$$t = t_1 + n \Rightarrow t = 30 + 36 = 66$$

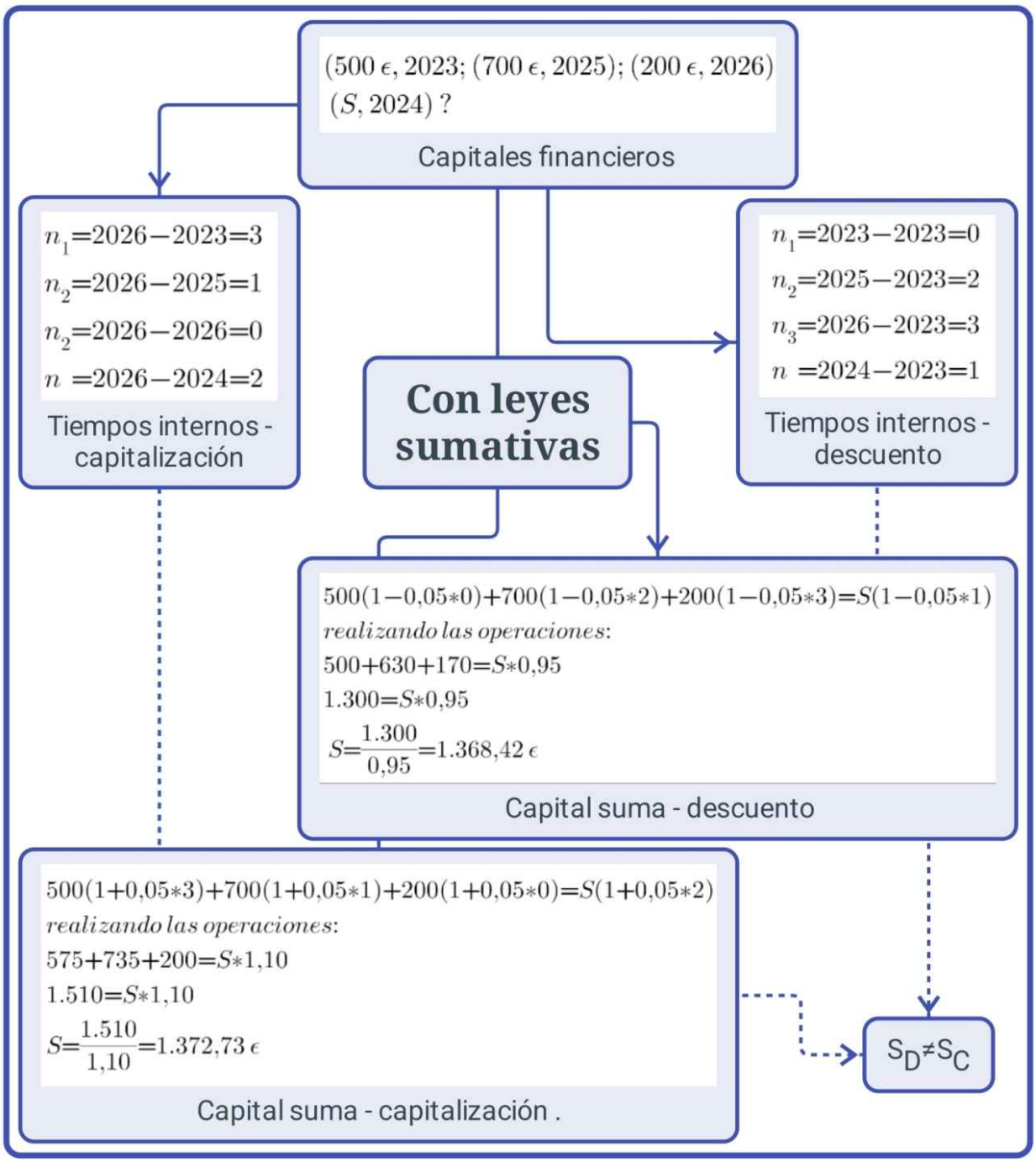
Vencimiento medio 66 días

3.- Hemos recibido un préstamo bancario de 100.000 € con vencimiento dentro de 5 años al 10 % de interés compuesto anual. Decidimos realizar su cancelación entregando 50.000 € al final del segundo año y el resto al final del quinto año.

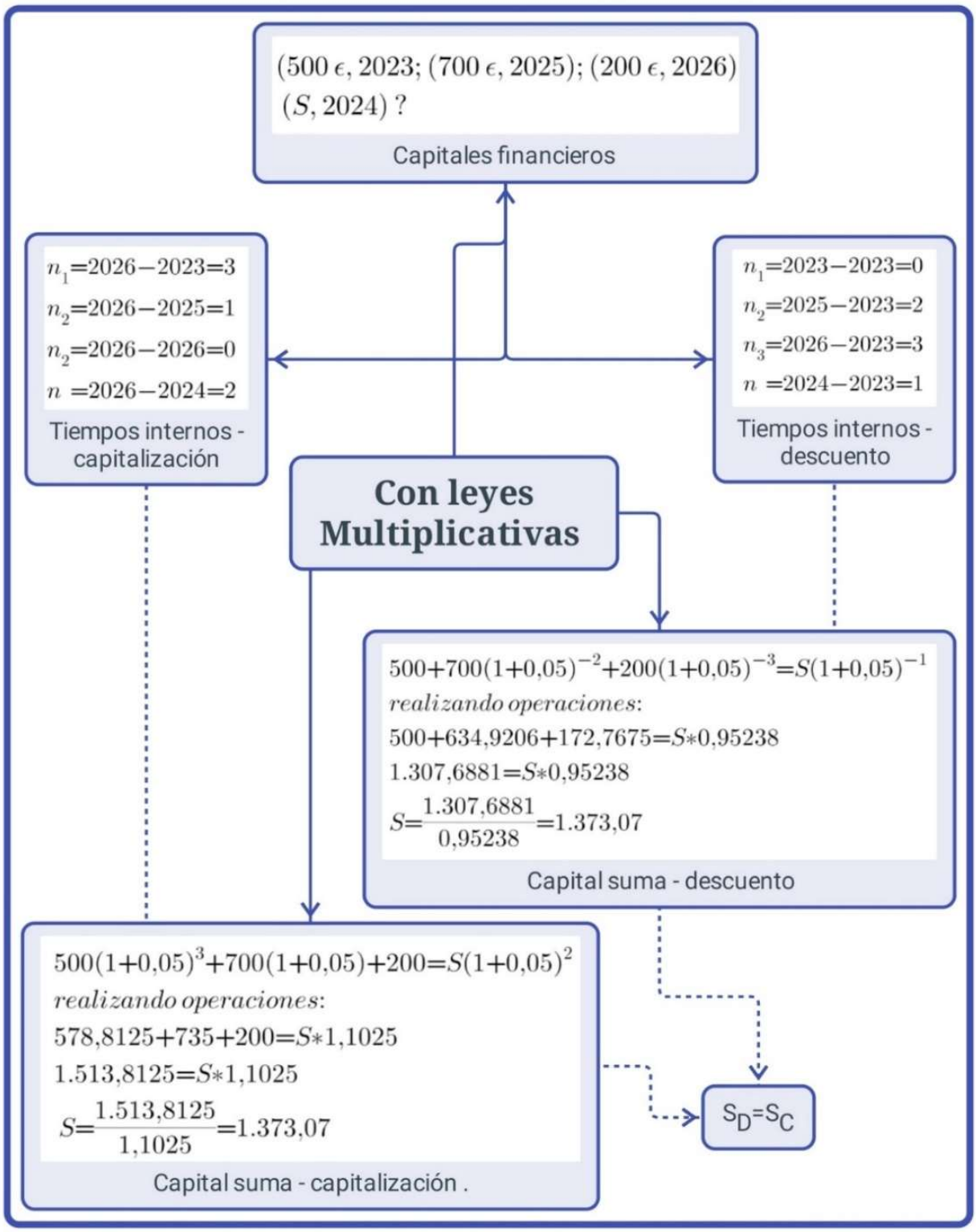
¿De cuánto es el importe del último pago al final del quinto año?


En este caso, conocemos el valor de S y necesitamos calcular C_2
Sustituimos en:
$S=C_1(1+i)^{-3}+C_2(1+i)^{-5}$
$100.000=50.000(1+0,10)^{-3}+C_2(1+0,10)^{-5}$
$100.000=37.565,74+C_2*0,6209$
$C_2=\frac{100.000-37.565,74}{0,6209}=100.551\ \epsilon$
Con ecuacion de suma financiera en el origen
S=100.000 €
i=10 % --> 0,10 compuesto anual
n=5
C1=50.000 €
¿C2?
VDT OTRO 1 P.AÑ EXIT
N %IA V.A PAGO V.F
3 10 ? 50.000
V.A.=−37.565,74 €
100.000−37.565,74=62.434
N %IA V.A PAGO V.F
5 10 62.434 ?
V.F.=100.551 €
Con calculadora
Realizamos tres pasos
1) Calculamos el VA de C_1
2) Lo restamos a la suma financiera
3) Calculamos el VF del VA restante anterior

4.- Dados los siguientes capitales, obtener el capital suma en 2024, aplicando las leyes de capitalización simple y descuento racional: (500 €, 2023); (700 €, 2025); (200 €, 2026).



5.- Con los mismos capitales indicados en el ejemplo anterior, obtener el capital suma en 2024 con las leyes de capitalización compuesta y descuento compuesto racional.



Si nos fijamos en los dos últimos ejemplos, vemos que la cuantía del capital suma es diferente cuando valoramos los capitales con

leyes sumativas (capitalización simple, descuento racional o descuento comercial).

Sin embargo, cuando aplicamos leyes multiplicativas, el resultado del capital suma es igual, aunque modifiquemos el momento de valoración.

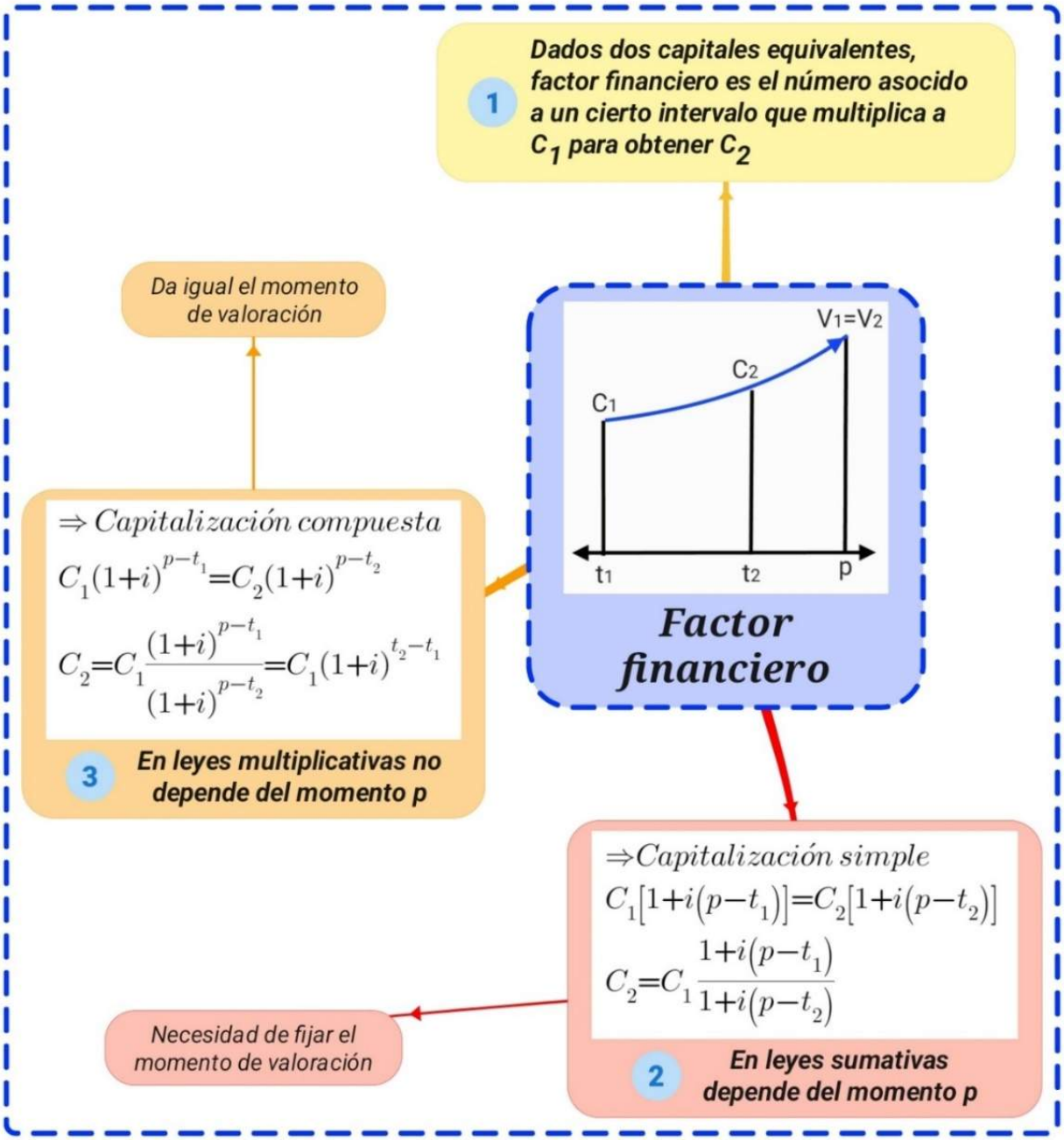
¿Por qué se produce esta diferencia?

La explicación se debe a que en las leyes sumativas el factor financiero, o número referido a un intervalo temporal, que multiplica a un capital para obtener el otro, (suponiendo que operamos con dos capitales), depende del momento de valoración en las leyes sumativas, y es independiente en las multiplicativas.

Lo veremos con más detalle en el mapa siguiente sobre el factor financiero.

***

49 Factor financiero



(1) **Definición.** Dados dos capitales, definimos factor financiero como el número asociado a un intervalo temporal que multiplica a un capital para obtener el otro.

(2) **Con leyes sumativas**. En la expresión matemática buscamos la equivalencia entre los dos capitales utilizando la capitalización simple y el punto de valoración en el momento (p). Observamos que el valor C_2 depende del momento (p).

Realizamos el ejemplo con capitalización simple, pero ocurre lo mismo con cualquier otra ley sumativa.

Esto implica que los intervinientes en una operación financiera tienen la necesidad de fijar el momento de valoración cuando apliquen leyes sumativas, porque el resultado es distinto. Ver ejemplo práctico en mapa (48.4).

(3) **Con leyes multiplicativas.** En este caso utilizamos la ley de capitalización compuesta para buscar la equivalencia entre los dos capitales. El factor financiero no depende del momento (p).

Esto es aplicable a las todas las leyes multiplicativas, capitalización compuesta, descuento compuesto racional y descuento compuesto comercial, como demuestra el ejemplo en el mapa (48.5).

Dado que con estas leyes se mantiene siempre la equivalencia de capitales, no es necesario que los intervinientes en una operación financiera acuerden el momento de valoración.

***

BLOQUE TERCERO – RENTAS

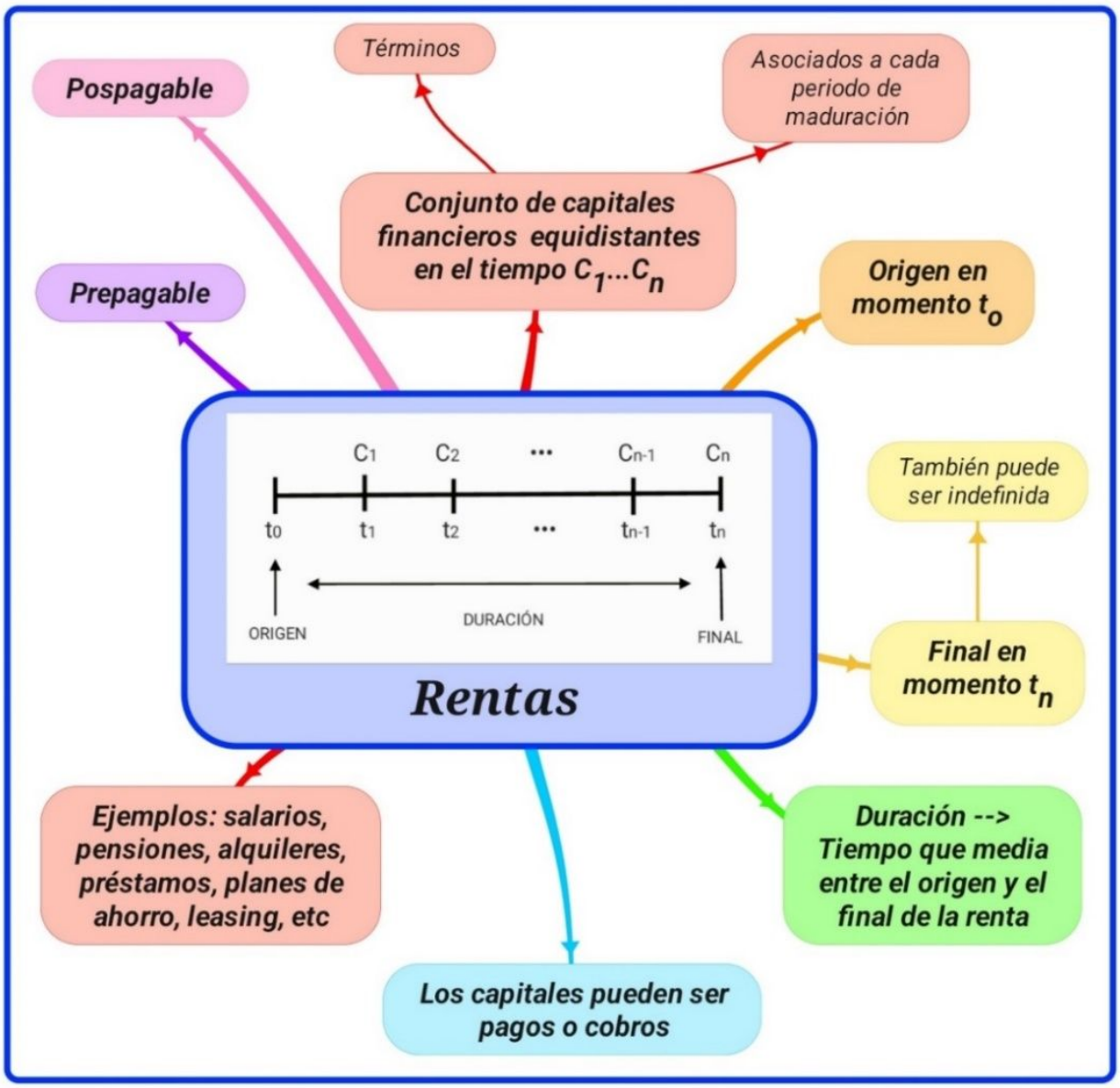
El porvenir es la renta más rica de la imaginación.

F. MARIN

La renta periódica es como un flujo constante de agua que, si se gestiona adecuadamente, puede llenar un lago entero con el tiempo.

METÁFORA

50 Rentas



Una renta financiera es un conjunto de capitales financieros (C,t) equidistantes en el tiempo. Dado un período general, a cada sub período se le llama período de maduración y a cada capital asociado término de la renta.

Toda renta tiene origen en el momento t_0, y final en el momento t_n, excepto cuando es indefinida. El tiempo entre el momento inicial y final es la duración de la renta.

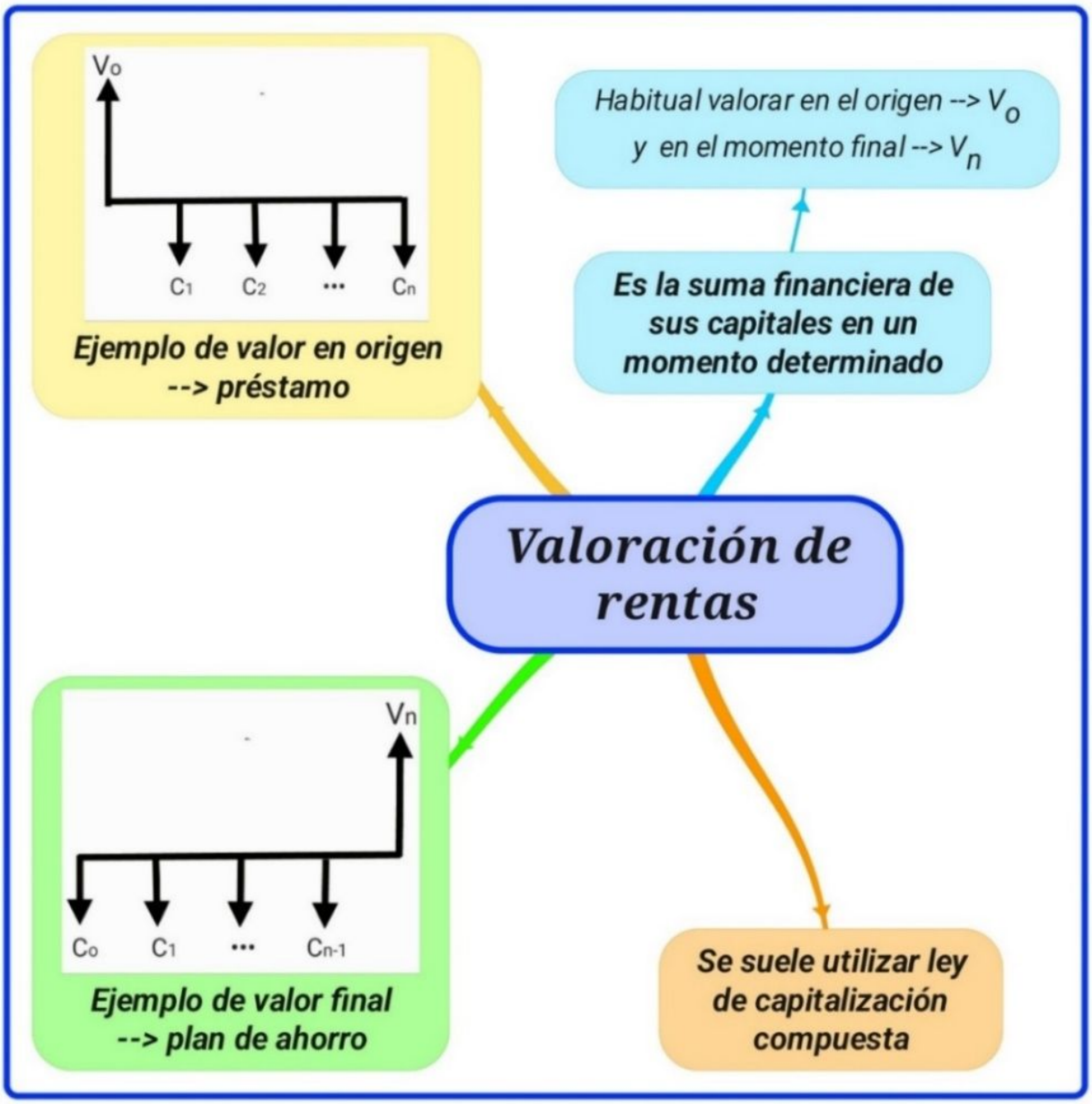
Los términos de la renta pueden ser pagos o cobros, en función del punto de vista del deudor o del acreedor.

Existen numerosos ejemplos de rentas como pueden ser: los salarios, las pensiones, los alquileres, préstamos de cuota fija, planes de ahorro, leasing, etc.

Cuando los capitales vencen al principio de cada período de maduración decimos que es una renta prepagable y cuando vencen al final pospagable.

***

51 Valoración de rentas



El valor de una renta es la suma financiera de sus capitales o términos en un momento determinado. En principio se pueden valorar en cualquier momento, pero lo habitual es efectuarlo en el momento inicial o en el final. Al momento inicial le llamaremos en capítulos siguientes valor actual para adaptarnos a la notación usual de las calculadoras financieras y Excel.

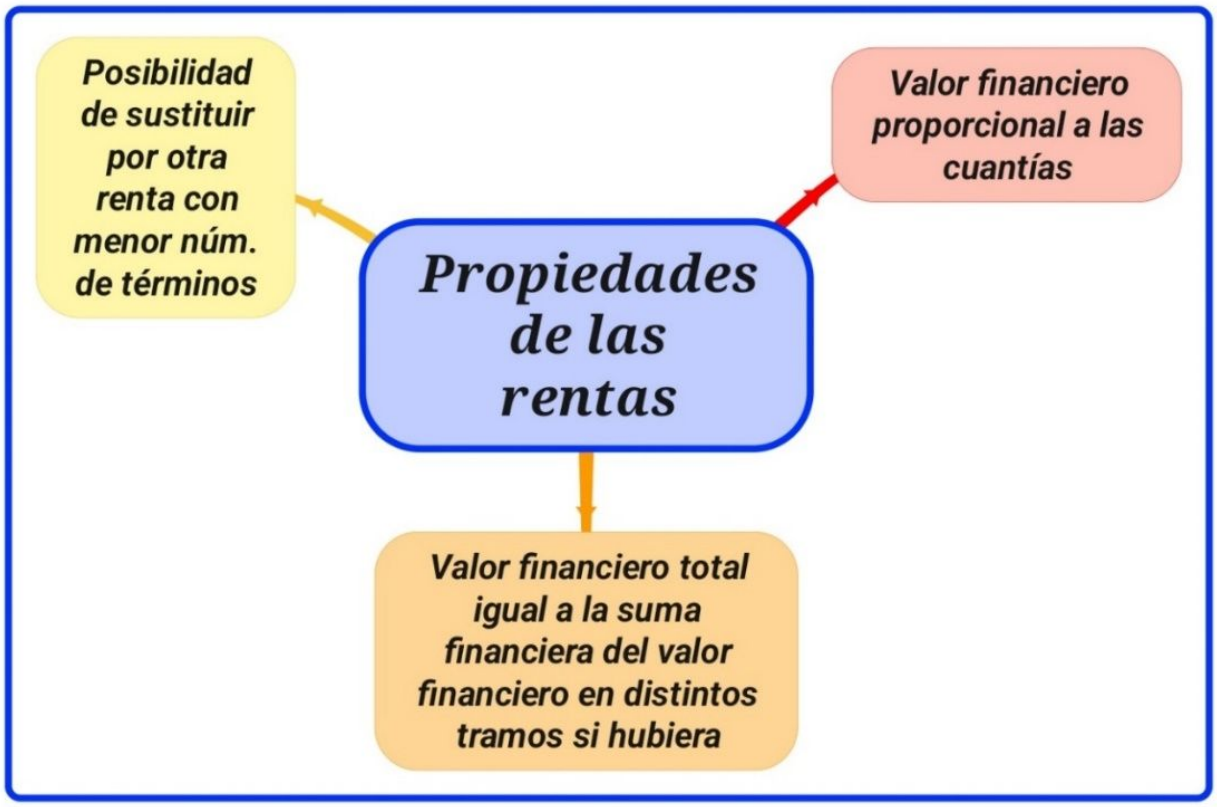
Para calcular el valor de una renta se utiliza la ley de capitalización compuesta, que siempre da el mismo resultado independientemente del momento que se tome como referencia para la valoración.

En el diagrama ejemplo de un plan de ahorro, las fechas hacia abajo representan los entregas de dinero y la última flecha al final hacia arriba representa el valor final de una serie de pagos anteriores.

En el diagrama de préstamo, la primera flecha es el importe del préstamo recibido y también el valor actual de una serie de pagos periódicos futuros representados por las flechas hacia abajo.

***

52 Propiedades de las rentas



Para llevar a cabo operaciones con rentas es conveniente tener en cuenta las tres propiedades siguientes:

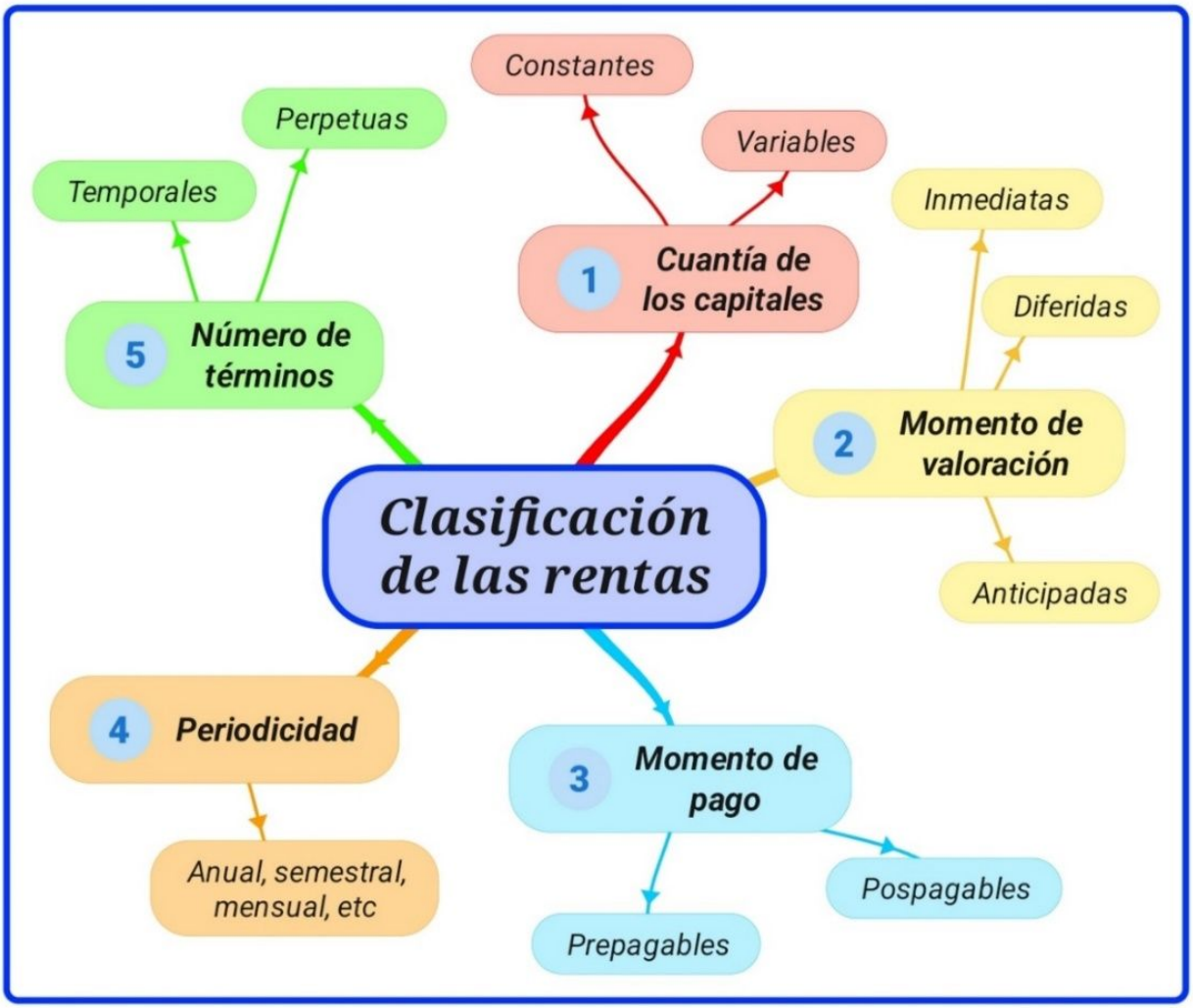
Una, el valor financiero de una renta es proporcional a las cuantías de los capitales o términos y se deduce de la propiedad de proporcionalidad de los capitales en las leyes financieras. Esto facilita la valoración de rentas a partir de la fórmula con rentas unitarias, la cual multiplicada por el importe del término constante se obtiene el valor total de la renta en un momento determinado. Lo veremos en el mapa (54).

Otra propiedad es que podemos dividir la renta en varios tramos. Puede ser, por ejemplo, porque tengan distinto tipo de interés. El valor financiero total es igual a la suma financiera en los distintos tramos.

Y por último, existe la posibilidad de sustituir una renta por un número menor de términos, lo que nos permite operar con rentas fraccionadas.

***

53 Clasificación de la rentas



Utilizamos los cincos criterios siguientes:

(1) **Cuantía de los capitales.** Las rentas pueden ser constantes, cuando el importe del capital es igual para todos sus términos, o variable cuando son distintos.

(2) **Momento de valoración**. Las rentas son inmediatas cuando se valoran en un momento que está entre el origen y el final de la renta. Diferidas, cuando se valoran en un momento anterior a su

origen y anticipadas cuando se valoran en un momento posterior a su final.

(3) **Momento de pago**. Son rentas pospagables cuando los capitales vencen al final de cada período de maduración. Por ejemplo, una pensión que se cobra a finales del mes al que pertenece. Y rentas prepagables, las que vencen al principio de período. Por ejemplo, un alquiler mensual que se paga por anticipado.

(4) **Periodicidad.** De acuerdo con la periodicidad de los términos, tenemos rentas anuales, semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, mensuales, semanales, diarias, entre otras. Existen tantas periodicidades como pueda dividirse el tiempo. Incluso pueden existir rentas con una duración superior al año.

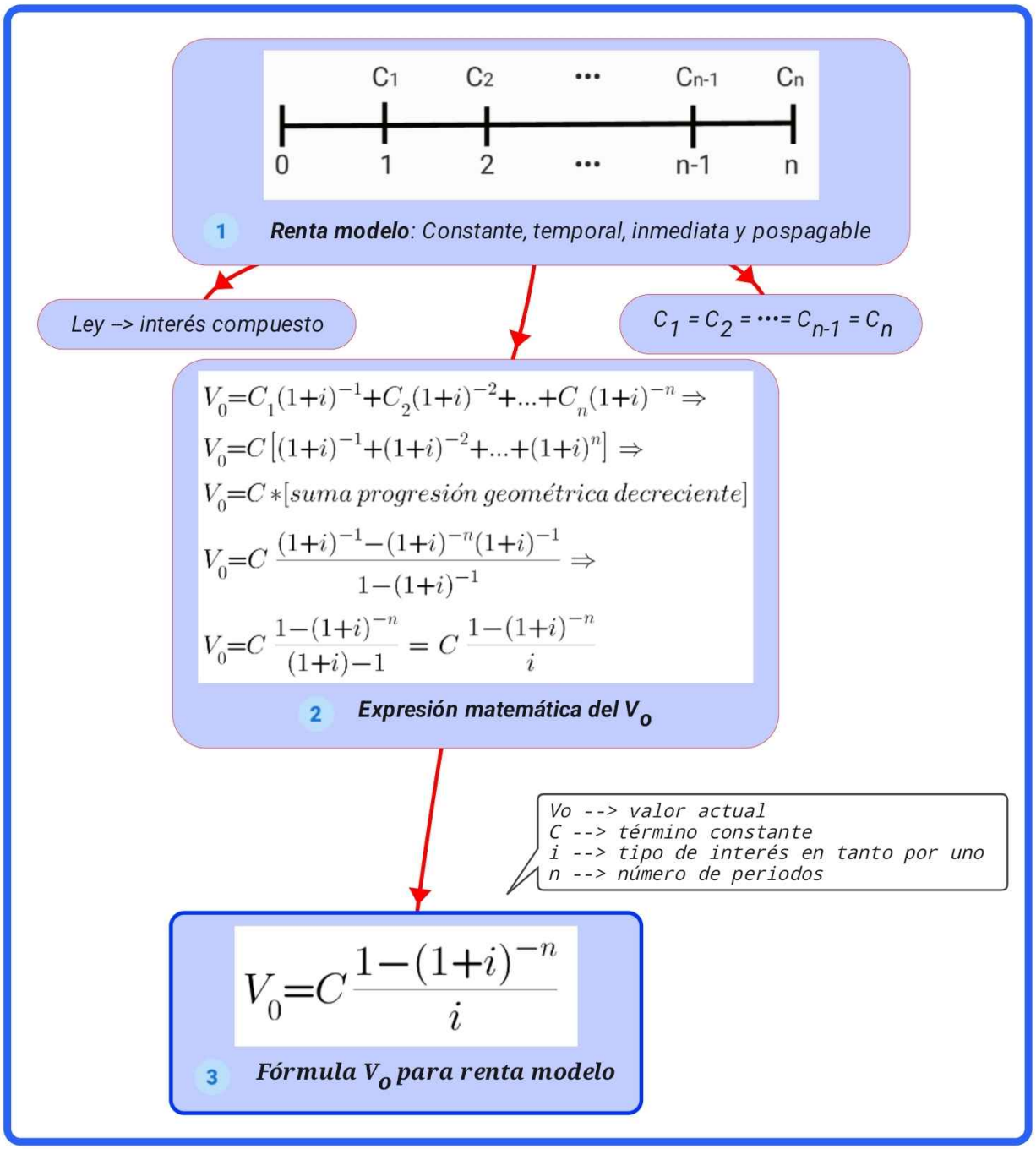
(5) **Número de términos.** Decimos que una renta es temporal cuando tiene un número finito de términos y perpetua cuando su duración es infinita.

El número de términos lo podemos obtener del contrato o bien de la estimación de su duración. Por ejemplo, un salario, hasta el mes de jubilación.

Las rentas con un número muy elevado de términos pueden considerarse como perpetua. Por ejemplo, los cupones que se pagan por la deuda perpetua emitida por el Estado.

***

54 Fórmula para calcular el valor actual de la renta modelo



(1) **Definición**. En primer lugar, vamos a definir la renta modelo. Es una renta constante, temporal, inmediata y pospagable, como

podemos ver en la representación gráfica. Además, para realizar operaciones le aplicamos la ley de capitalización compuesta.

A continuación vamos a obtener la fórmula para su valoración en origen. Esta, además, nos servirá para obtener las fórmulas del resto de rentas, aplicando pequeñas modificaciones en función de sus características. Por esta razón, se denomina renta modelo.

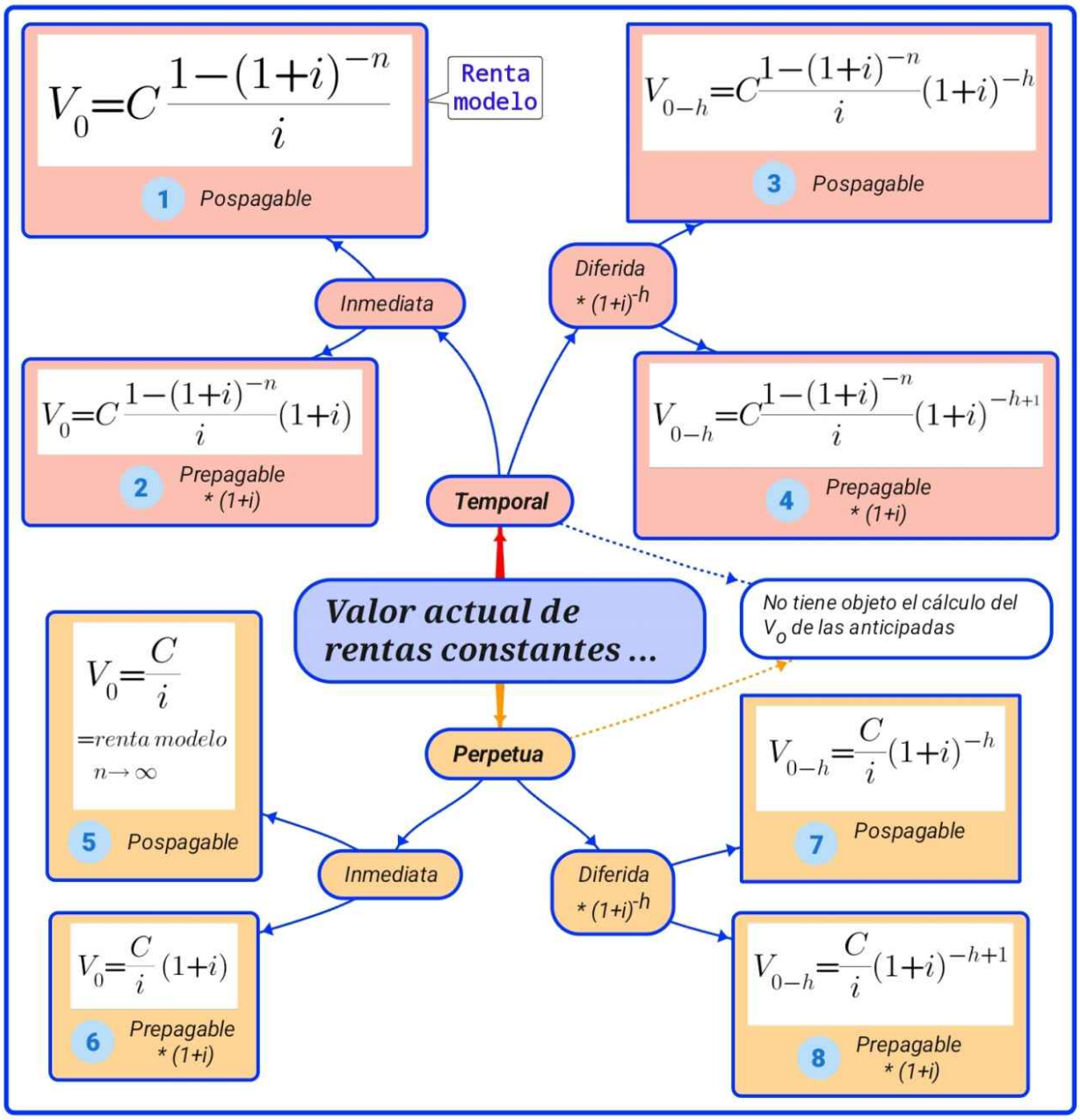
(2) **Expresión matemática.** El valor actual de la renta es la suma del valor actual de todos sus términos. Esto es igual al término constante por la suma de una progresión geométrica decreciente de razón $(1+i)^{-1}$, como se muestra en la expresión matemática.

La suma de la progresión geométrica indicada es el valor actual de una renta unitaria.

(3) **Fórmula.** Simplificando la expresión anterior, obtenemos la fórmula para calcular el valor actual de la renta modelo. El valor actual, V_0, es igual al término constante multiplicado por la renta unitaria, como ya hemos indicado.

***

55 Valor actual de rentas constantes



A partir de la fórmula de la renta modelo vamos a obtener el resto de fórmulas para calcular el valor actual V_0 de rentas constantes. En cada rama se indica el tipo de renta y el operador matemático que multiplica la fórmula de la renta modelo para obtener la fórmula del valor actual que corresponda según el tipo de renta.

(1) **Renta modelo.** Esta es la fórmula de la renta modelo desarrollada en el mapa anterior. Recordamos las características: constante, temporal, inmediata y pospagable.

(2) **Inmediata prepagable.** Para calcular el valor actual de una renta prepagable, es decir, que cada término vence al principio del período de maduración, multiplicamos el valor actual de la renta modelo por $(1+i)$.

(3) **Diferida pospagable.** En el caso de una renta diferida, es decir, que se valora antes de su origen, momento (-h). Obtenemos su fórmula descontando el valor actual de la renta modelo durante (h) períodos. Para ello multiplicamos V_0 por $(1+i)^{-h}$. El exponente (h) es el número de períodos que se valora antes de su origen. La notación de esta renta es V_{0-h}.

(4) **Diferida prepagable.** Si además es: la renta modelo + diferida + prepagable, multiplicamos por $(1+i)^{-h}$ y por $(1+i)$, o lo que es lo mismo por $(1+i)^{-h+1}$.

(5) **Perpetua pospagable**. La fórmula de una renta perpetua es la renta modelo cuando (n) tiende a infinito, en donde lim $(1+i)^{-n}=0$ cuando (n) tiende a infinito, por lo que la expresión se reduce a $V_0=C/i$.

(6) **Perpetua prepagable.** A partir de fórmula anterior, cuando la renta es prepagable se multiplica por $(1+i)$.

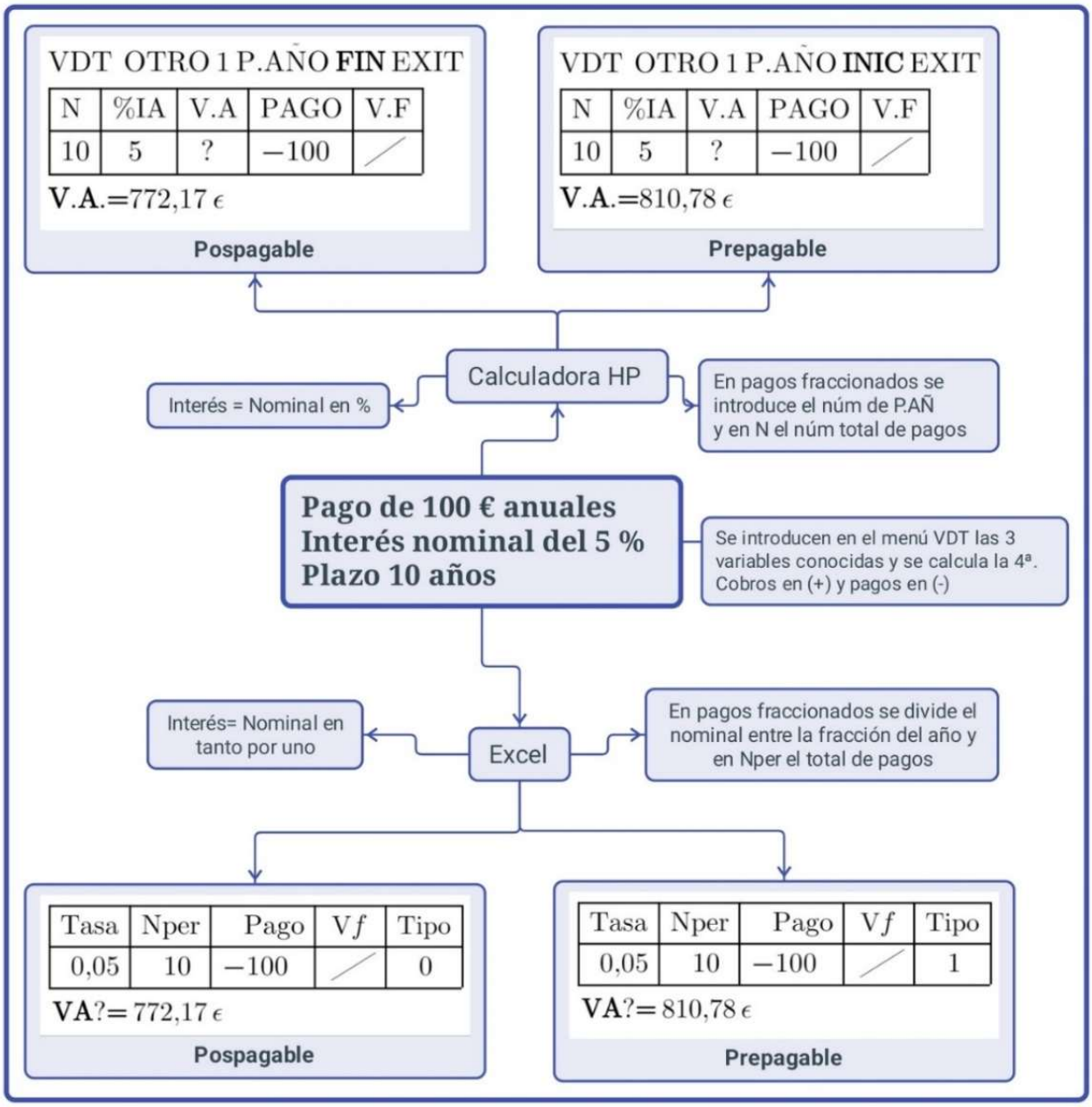
(7) **Perpetua, diferida pospagable**. Y en el caso de renta perpetua diferida pospagable se actualiza la indicada en (5) multiplicando por $(1+i)^{-h}$, donde (h) es el número de períodos que se valora antes de su origen.

(8) **Perpetua, diferida prepagable**. Se multiplica la perpetua pospagable por $(1+i)^{-h}\,(1+i) = (1+i)^{-h+1}$.

Las rentas anticipadas son las que se valoran después de su fecha final. No tiene objeto calcular su valor inicial dado que este coincidiría con el valor inicial de las inmediatas.

***

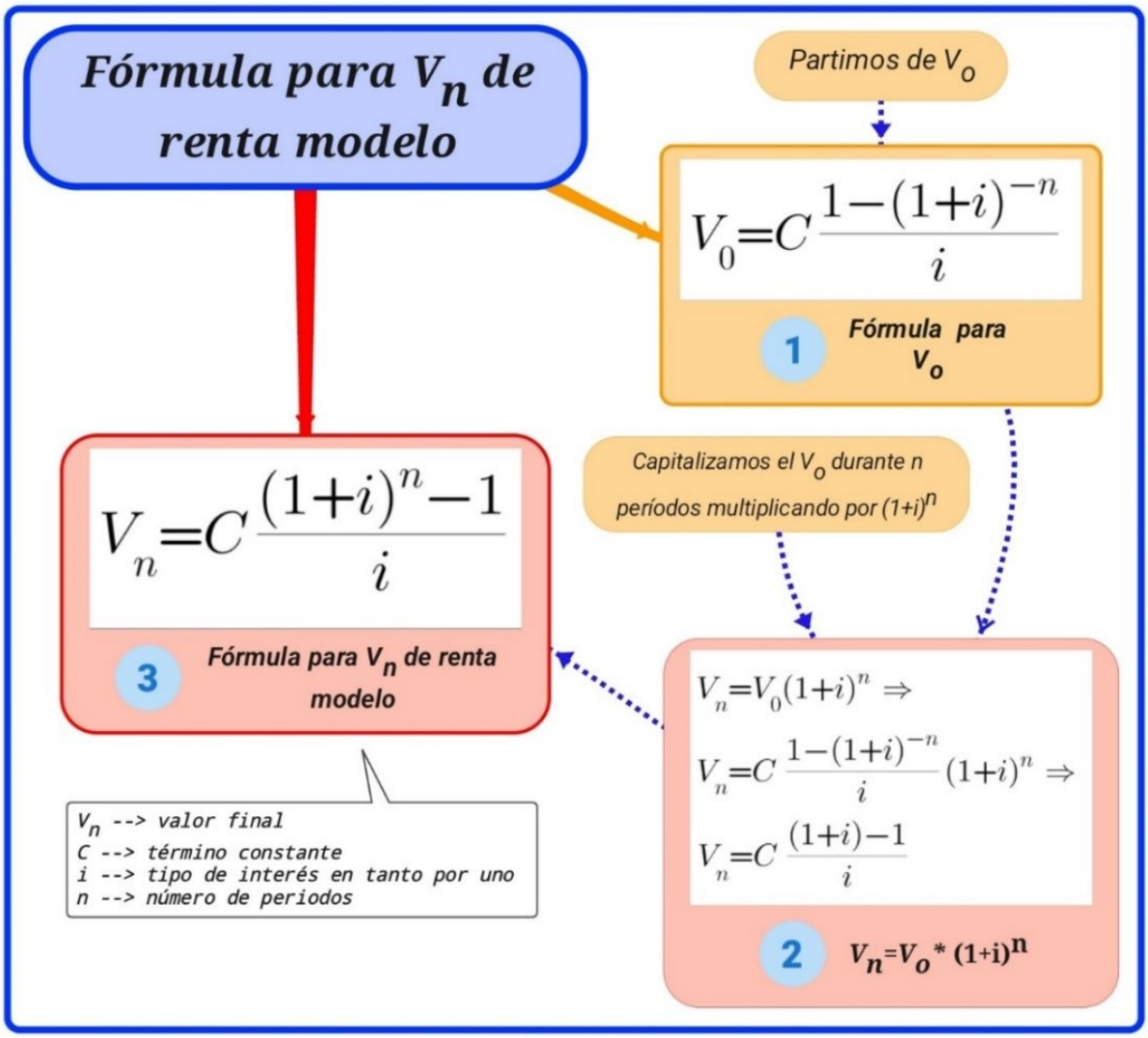
56 Valor actual de rentas con calculadora y con Excel



Este es un ejemplo de cómo se calcula el VA, mediante calculadora y Excel, de rentas inmediatas pospagables y prepagables.

***

57 Fórmula para calcular valor final de la renta modelo



Recordemos la renta modelo explicada en los mapas anteriores.

(1) **V_0 renta modelo.** Partimos de la fórmula que calcula su valor inicial V_0 indicada en el mapa (54).

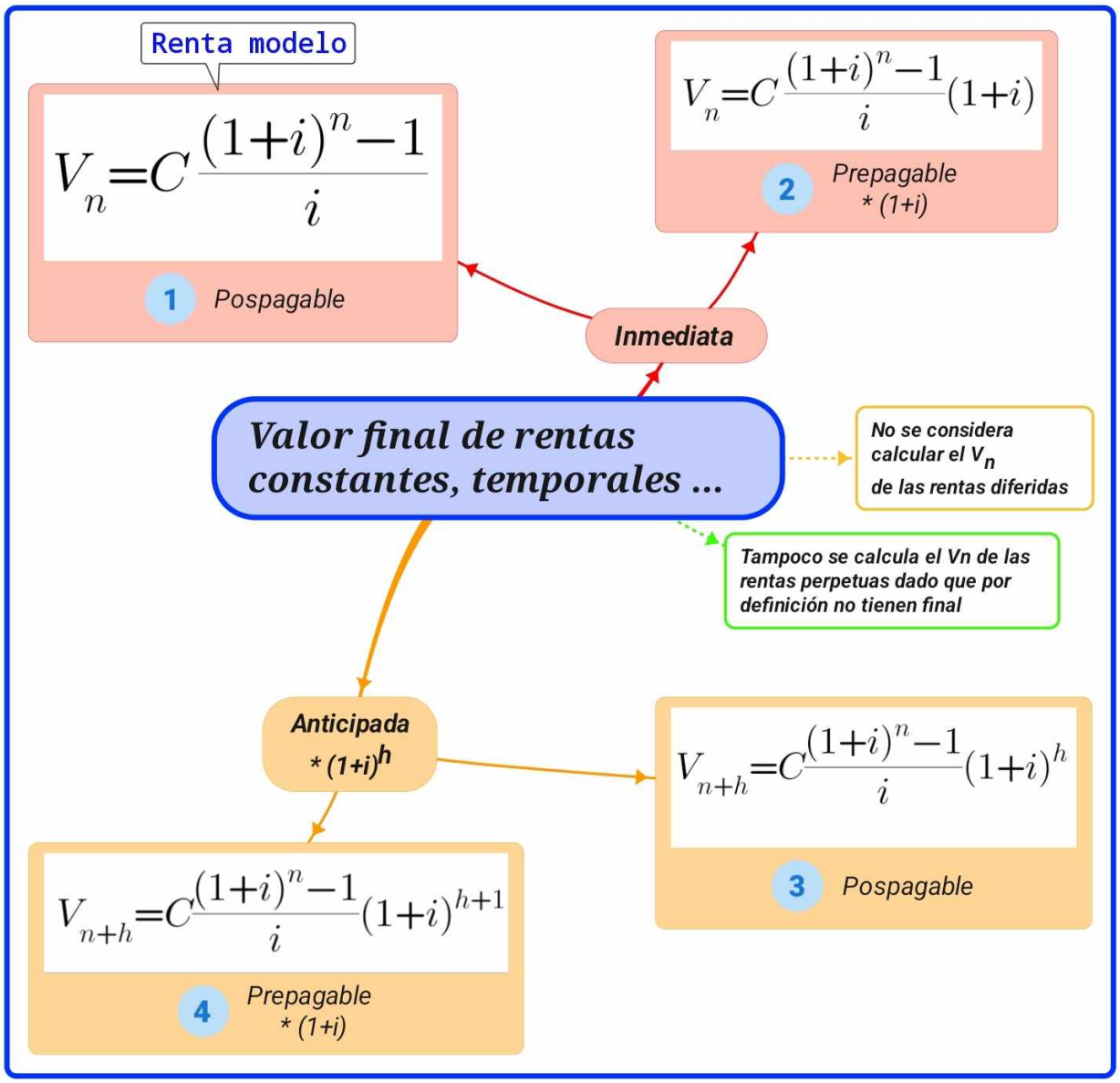
(2) **V_n renta modelo**. El valor final es el actual capitalizado durante (n) períodos. Es decir, el valor inicial multiplicado por $(1+i)^n$, el

resultado, $V_n=V_0(1+i)^n$. Sustituyendo V_0 por su expresión en (1) y simplificando obtenemos la fórmula en (3).

(3) **Fórmula**. Como resultado, esta es la fórmula para calcular el valor final de la renta modelo. Además, la utilizaremos para obtener el valor final del resto de rentas, en función de sus características, en el mapa siguiente.

***

58 Valor final de rentas constantes y temporales



En la valoración final solo se tratan las rentas temporales, ya que las perpetuas por definición no tienen final. Tampoco se considera calcular el valor final de las diferidas porque dicho valor coincidiría con el de las inmediatas. Por lo tanto, las fórmulas se reducen a los siguientes casos:

(1) **Renta modelo.** Esta es la fórmula modelo para la valoración final de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable.

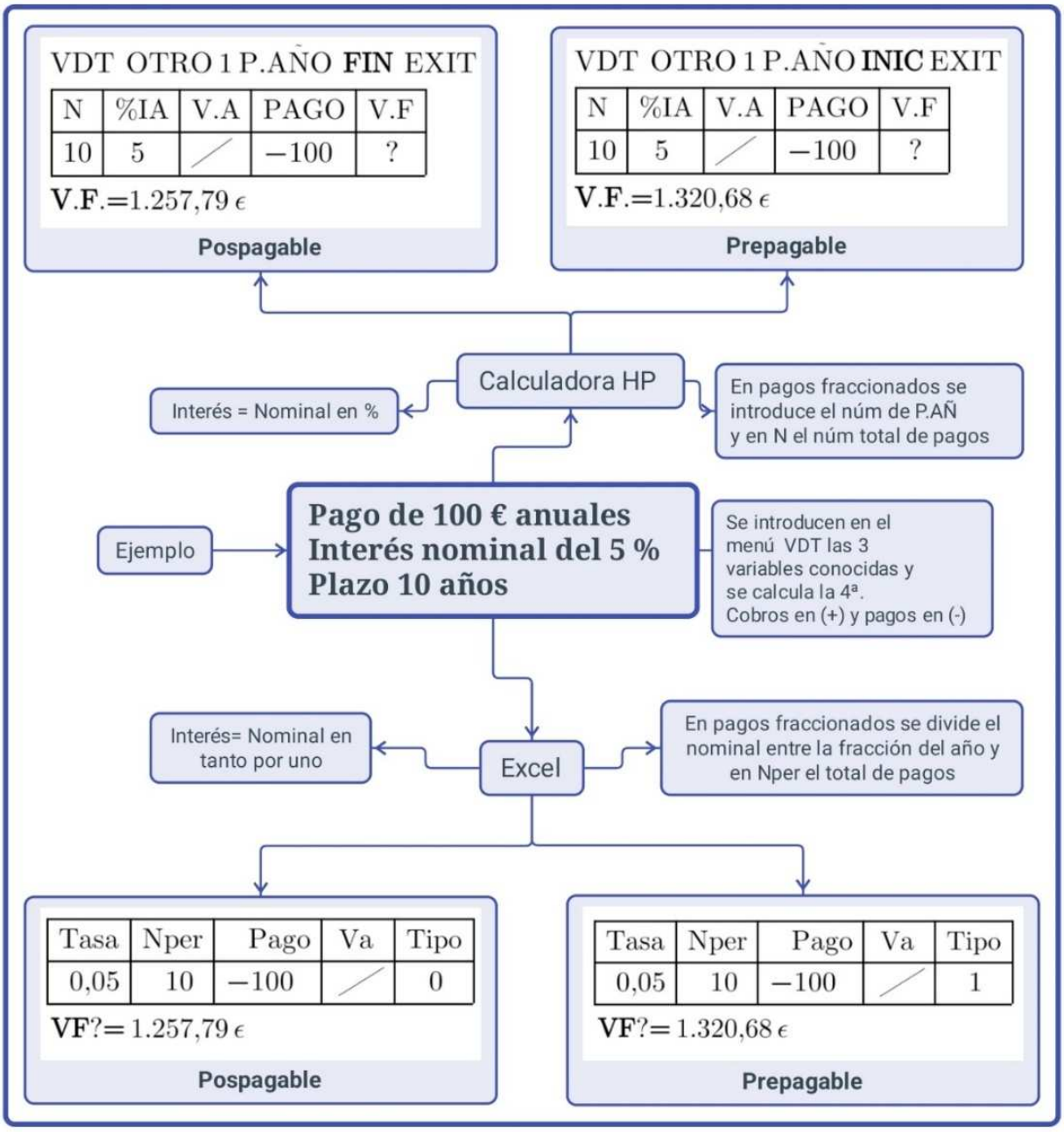
(2) **Prepagable**. Cuando el vencimiento de los pagos es prepagable, multiplicamos la anterior por el operador $(1+i)$.

(3) **Anticipada pospagable**. En el caso de valorar la renta después de su final, es decir, en las anticipadas, multiplicamos por $(1+i)^h$, que es lo mismo que capitalizar el valor final (h) períodos. En la notación la llamamos V_{n+h}.

(4) **Anticipada prepagable.** Si además de anticipada añadimos que es prepagable multiplicamos por $(1+i)$. Es decir, $(1+i)^h\ (1+i)= (1+i)^{h+1}$. En la notación, se denomina V_{n+h}.

***

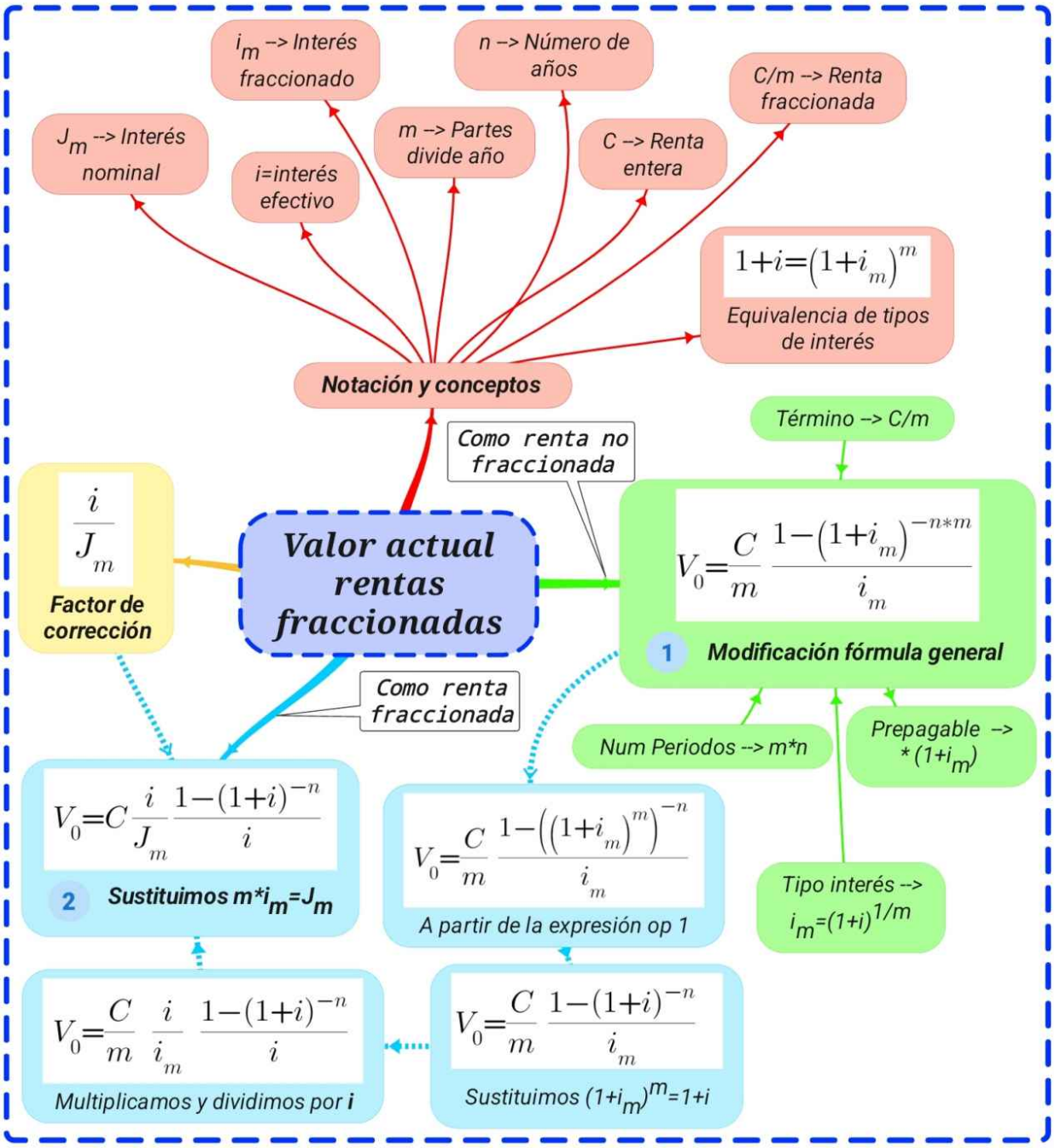
59 Valor final de rentas constantes y temporales con calculadora y con Excel



Este es un ejemplo de cómo se calcula el valor final utilizando la calculadora y Excel, de rentas inmediatas pospagables y prepagables.

***

60 Valor actual de rentas constantes fraccionadas



Existen un tipo de rentas denominadas fraccionadas, y es cuando la cuantía anual constante (C) se divide en (m) partes iguales con vencimientos asignados a (m) subperíodos de tiempo.

Si el vencimiento de cada término fraccionado vence al final de cada subperíodo es pospagable y cuando vence al principio de cada subperíodo es prepagable.

En el mapa mental se detalla la notación y los conceptos ya utilizados en capítulos anteriores. Dado que se utiliza capitalización compuesta, es importante destacar la equivalencia financiera, $1+i=(1+i_m)^m$, con el fin de calcular el tipo de interés que corresponde a la misma unidad que la periodicidad de la renta.

Hay dos métodos para calcular el valor actual de una renta fraccionada:

(1) **Renta no fraccionada.** Uno, se trata de considerarla como una renta no fraccionada, pero modificando en las fórmulas ya estudiadas anteriormente los argumentos siguientes:

- ✓ La cuantía de cada subperíodo es, C/m.
- ✓ El número de términos es, m*n.
- ✓ Y el tipo de interés aplicable a cada subperíodo es, $i_m=(1+i)^{1/m}-1$, si partimos del interés efectivo, y $i_m=J_m/m$, cuando partimos del nominal.
- ✓ En el caso de que sea prepagable hay que multiplicar por $(1+i_m)$.

(2) **Renta fraccionada**. Otro, es tratarla como una renta fraccionada. Esto es, utilizando un factor de corrección o transformación se calcula el valor de una renta fraccionada a partir de una no fraccionada. En el mapa se describen los pasos para aislar dicho factor, $(=i/J_m)$, a partir de la fórmula utilizada para la opción (1).

Este factor multiplicado por la renta entera anual $(C*i/J_m)$ es el valor final de los términos fraccionados C/m, de un año cualquiera de la renta, y constituye una condensación de la renta fraccionada en una anual. Esta es otra forma de calcularlo.

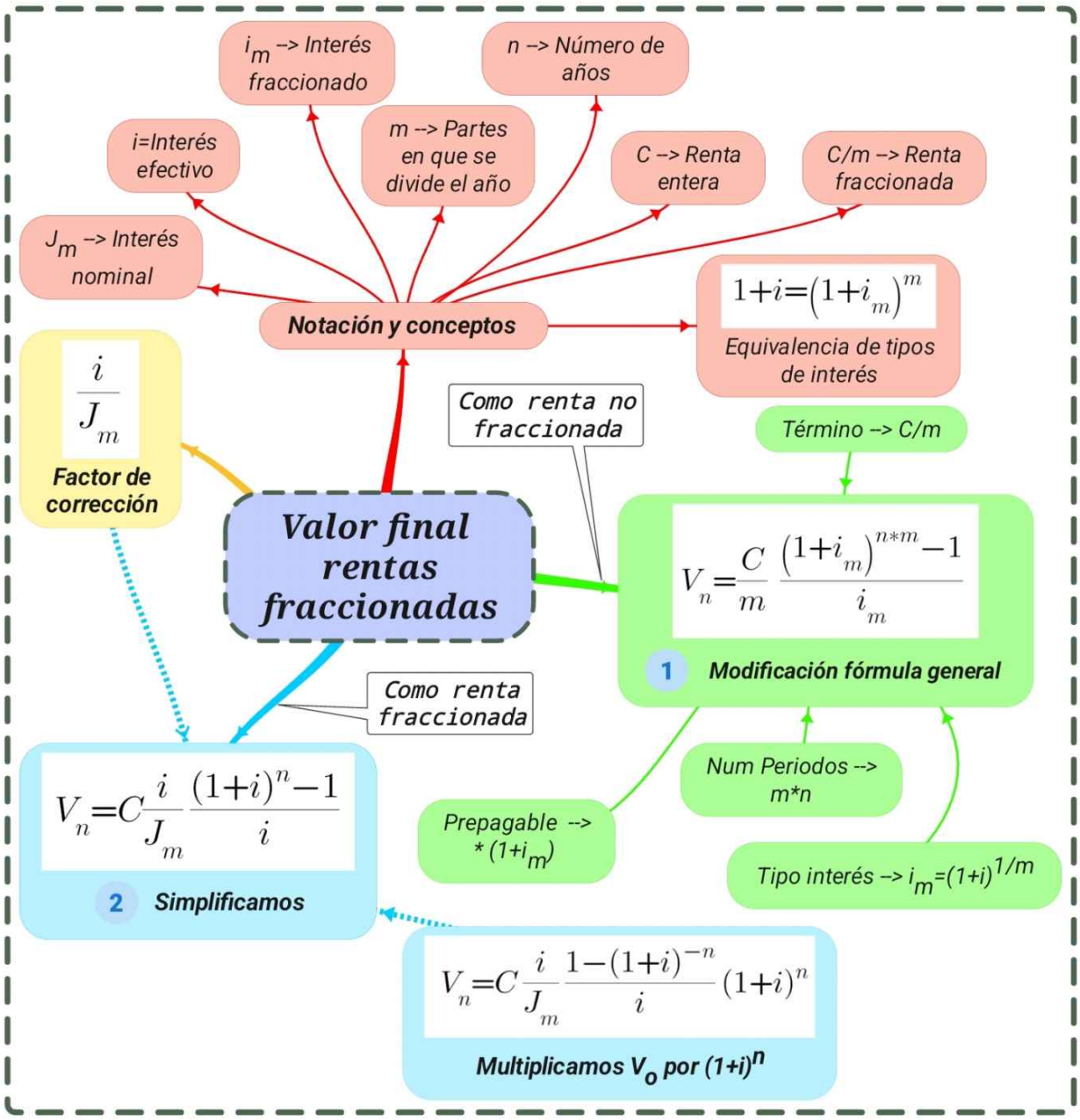
Dicho de otra manera, el valor actual de la renta fraccionada es igual a una renta no fraccionada cuyo término anual es la renta entera (C), durante (n) años, al tipo de interés anual (i), multiplicada por el factor de corrección indicado.

El valor del factor es mayor que uno, dado que en el cociente i/J_m, el tipo de interés efectivo (i) es mayor que el nominal J_m. Esto implica que el valor actual de la renta fraccionada es mayor que el de la renta entera, porque los capitales en forma fraccionada se depositan antes en la renta.

El resultado del valor actual es igual con cualquiera de los dos métodos.

***

61 Valor final de rentas constantes fraccionadas



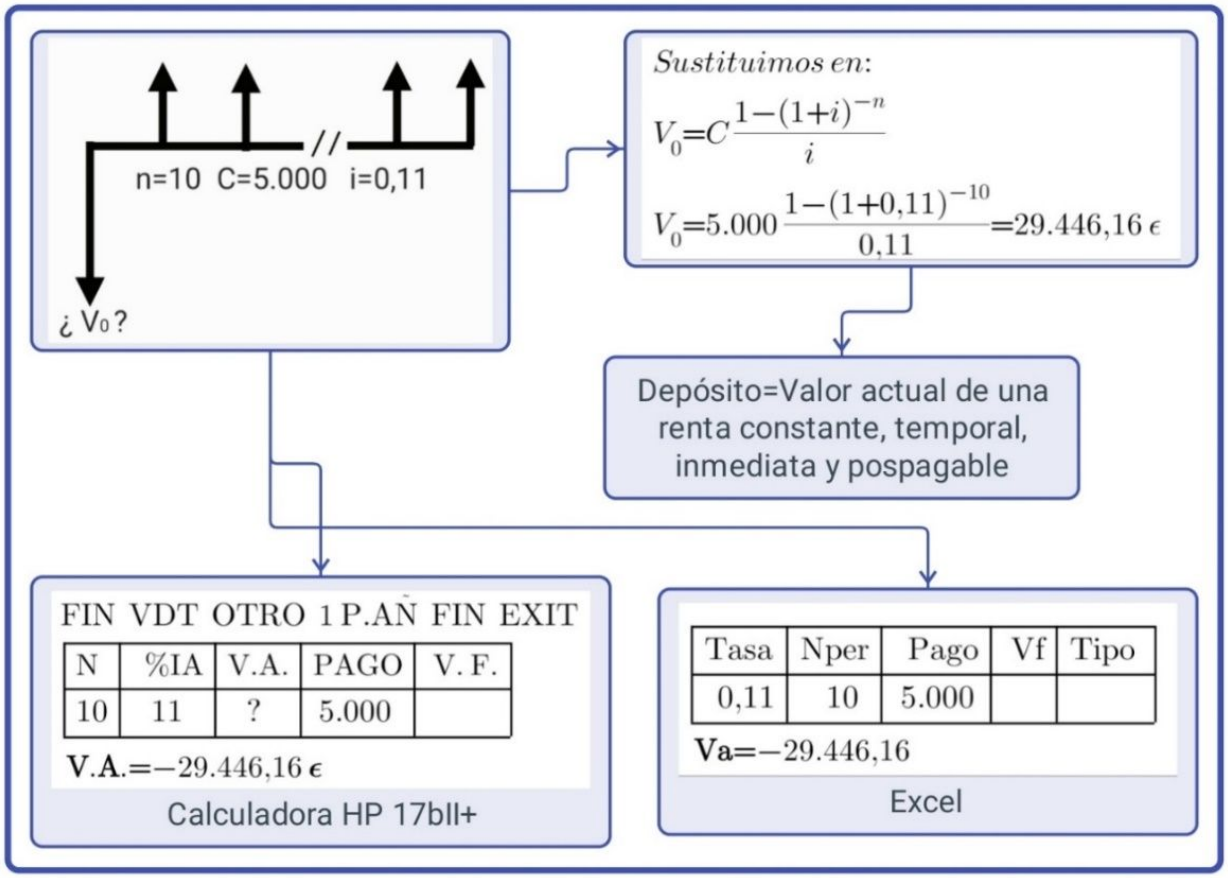
(1) **Como renta no fraccionada.** En relación con este mapa, los argumentos son similares a los del mapa anterior, con la diferencia que ahora tratamos de calcular valor final en vez del actual.

(2) **Como renta fraccionada.** Para calcular el valor final V_n, como renta fraccionada, empleamos la fórmula del V_0 multiplicada por $(1+i)^n$.

***

62 Ejemplos sobre rentas

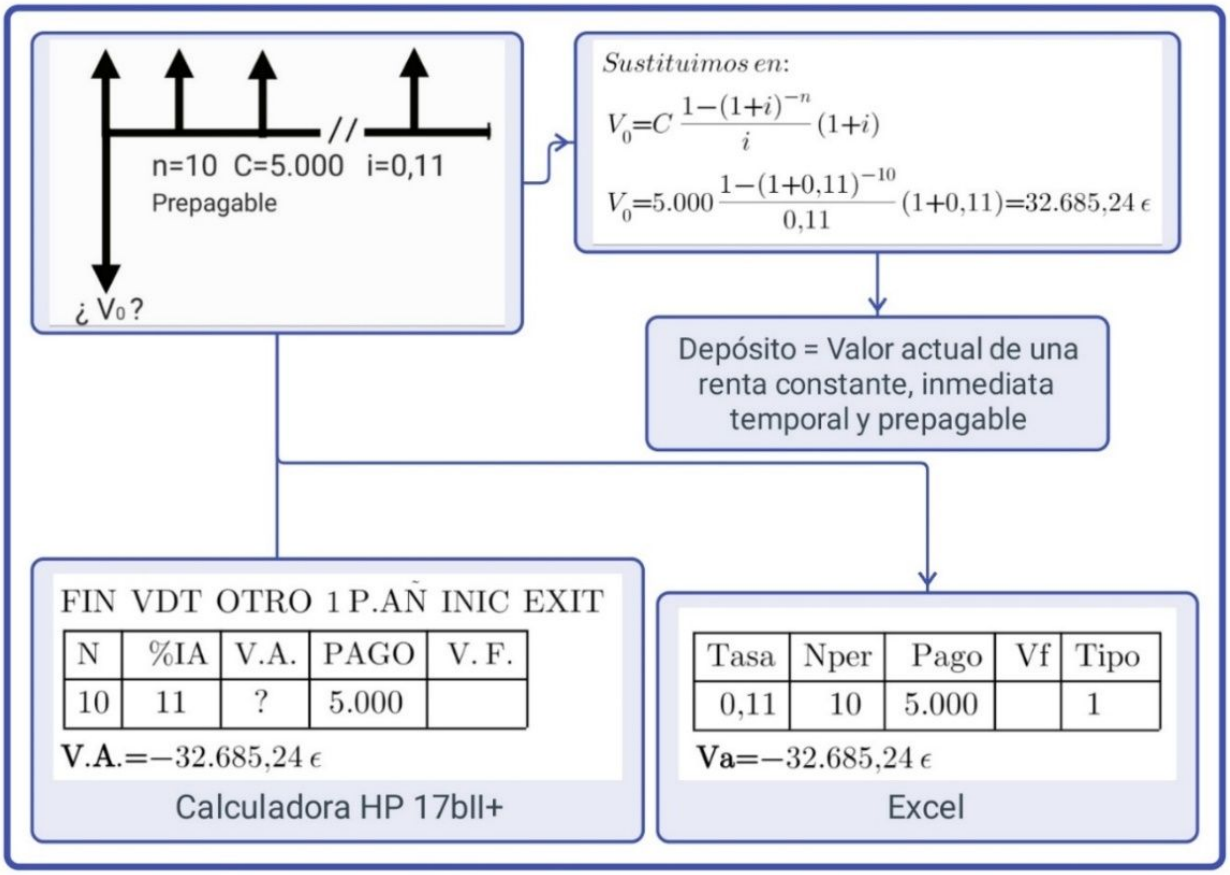
1.- Calcula qué cantidad necesitamos depositar en un banco para recibir una renta de 5.000 € al final de cada año, durante 10 años, considerando que se aplica el tipo de interés del 11 % efectivo anual.



Empezamos, como en los ejemplos anteriores, representado la operación en un diagrama. La flechas hacia arriba representan los cobros, y la primera flecha hacia abajo el VA de dichos cobros.

Se trata de calcular el valor actual de una renta anual, de 10 años de duración, constante y pospagable, que obtenemos mediante la fórmula, con la calculadora y con Excel.

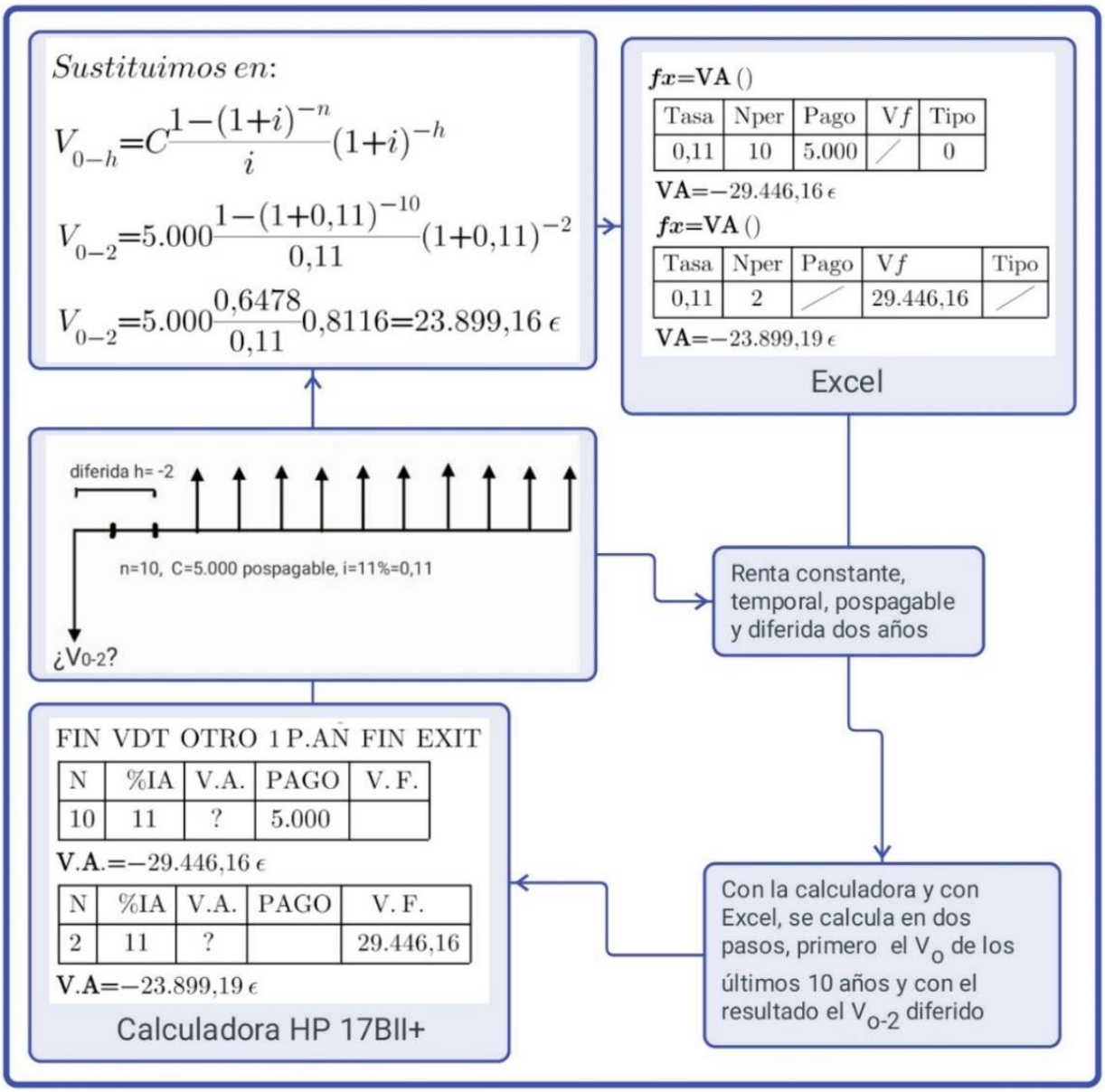
2.- Con los mismos datos del ejemplo anterior, calcula el importe a depositar en el banco, en el supuesto de que la misma renta la empezamos a recibir en el día de hoy.



Es la misma renta del caso anterior, pero ahora prepagable.

En la fórmula de la renta modelo multiplicamos por (1+i). Y en la calculadora y Excel indicamos que los cobros son al inicio de cada subperíodo.

3.- Calcula el importe a depositar en el banco en el supuesto de que la renta indicada en el ejemplo 1, la empezamos a recibir a partir del final del tercer año.

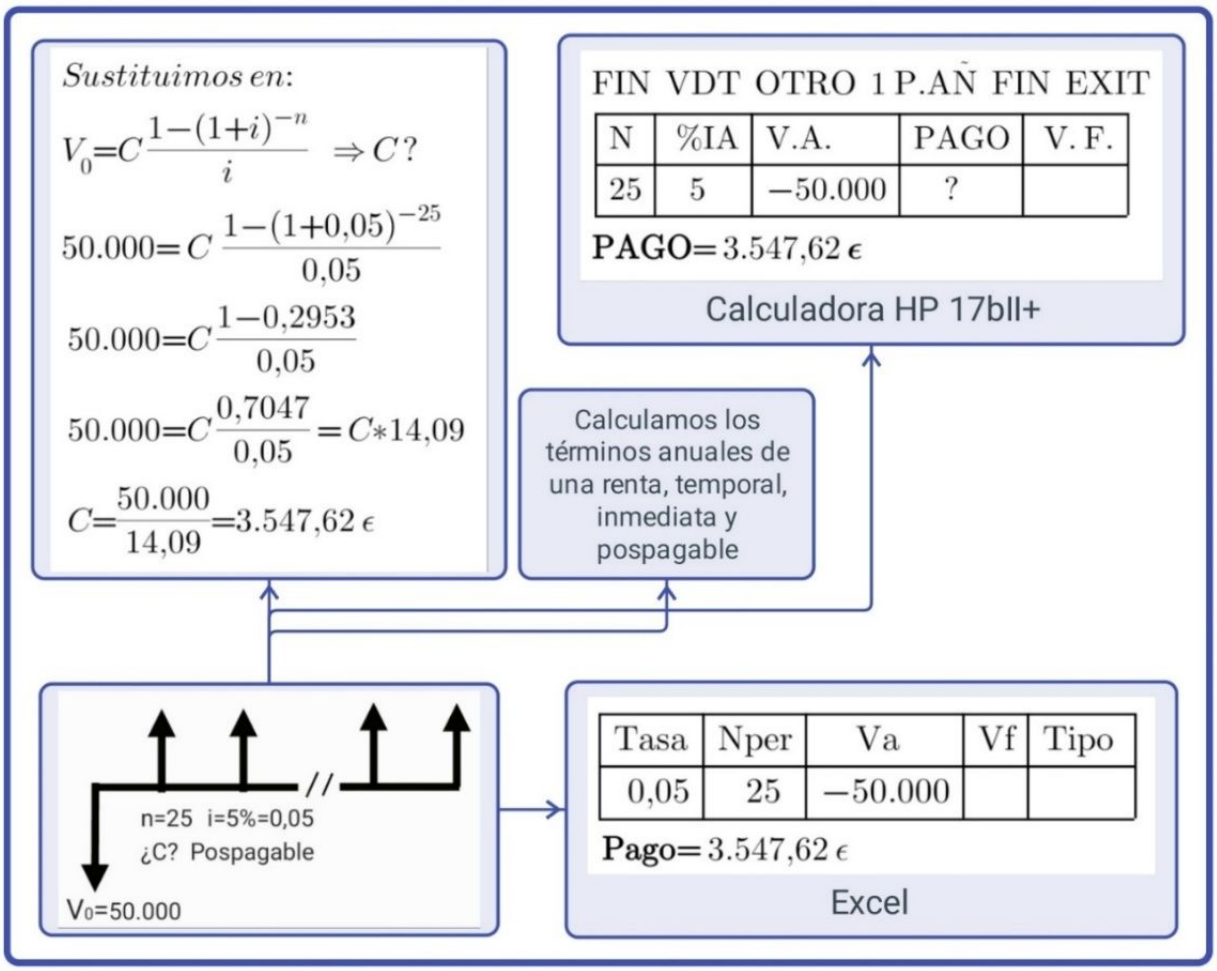


Ahora se trata de una renta constante, pospagable y diferida dos años. Es decir, que se valora dos años antes del inicio.

Se calcula con la fórmula para este tipo de rentas. Con la calculadora y Excel es necesario realizar dos pasos. El primero, calcular el valor en el momento cero, y el segundo, calcular el valor

actual considerando el periodo diferido sobre el importe obtenido en el cálculo anterior.

4.- Tenemos un plan de pensiones con unos derechos consolidados de 50.000 €, calcula el importe a percibir en forma de renta pospagable durante 25 años, a un tipo de interés del 5 %.

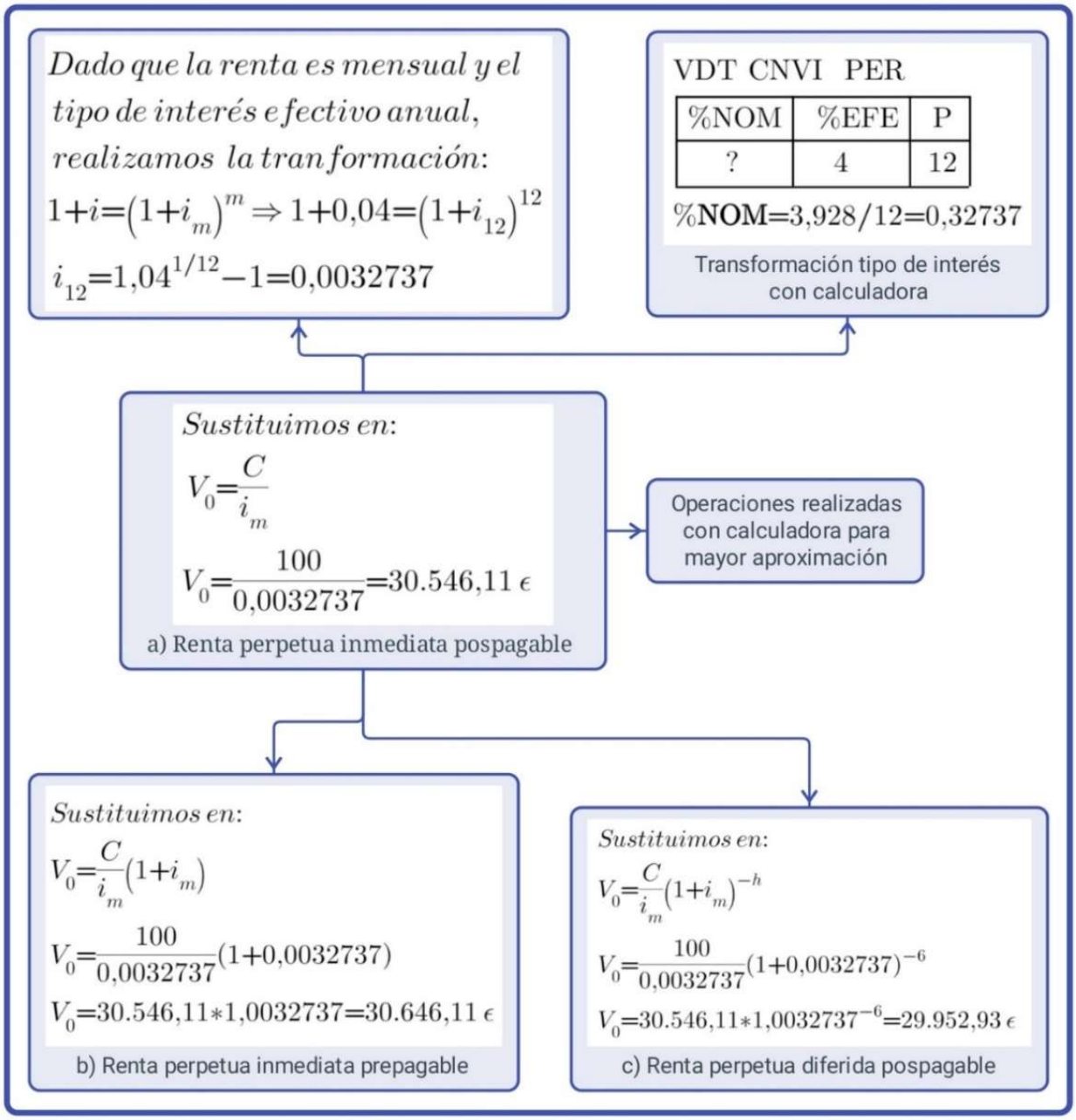


Se trata de calcular el importe de los términos de una renta constante y pospagable.

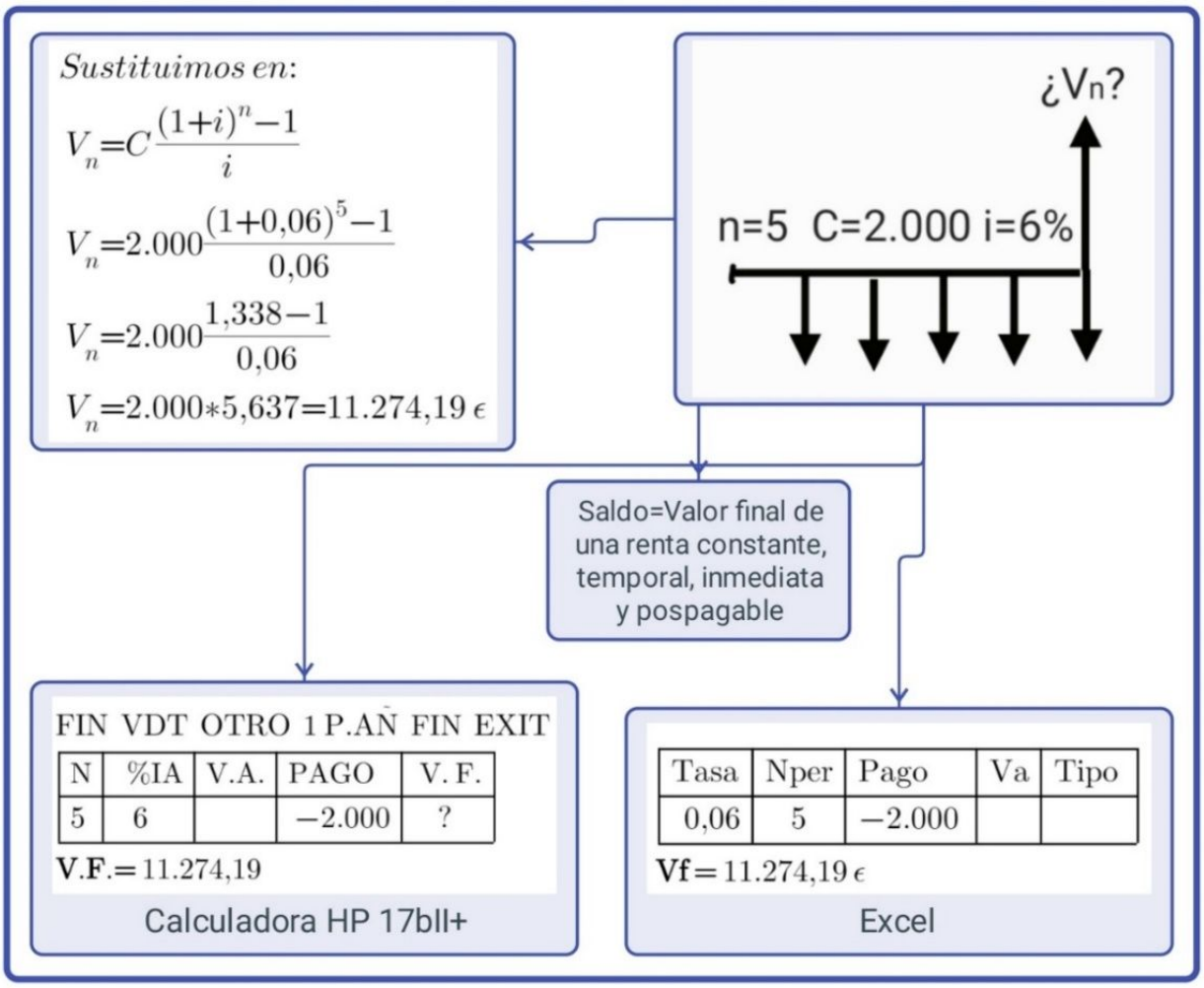
Sustituimos las variables conocidas en la fórmula de la renta modelo y despejamos el término (C).

5.- Calcula el valor en renta de una plaza de garaje por el que se percibe una renta perpetua de 100 € mensuales valorada al interés del 4 % anual vencido. En los siguientes supuestos:

a) **Recibimos el alquiler al final de cada mes.**
b) **Recibimos el alquiler al principio de cada mes.**
c) **Empezamos a percibir el alquiler a partir del final del sexto mes.**



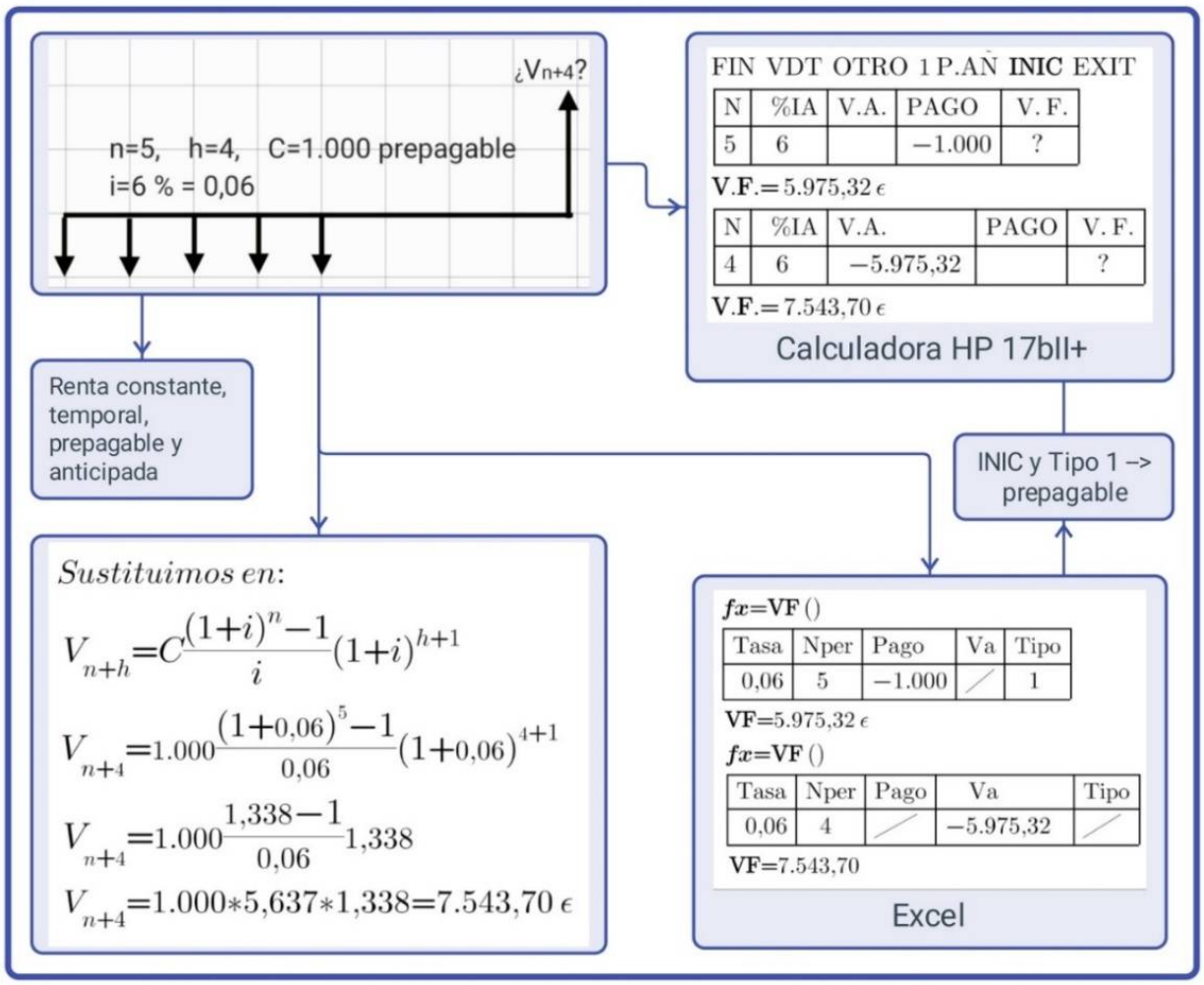
6.- ¿Cuánto es el saldo bancario dentro de 5 años, resultado de ingresar 2.000 € al final de cada año y capitalizado al 6 % de interés compuesto anual?



En este caso calculamos el valor final de la renta indicada.

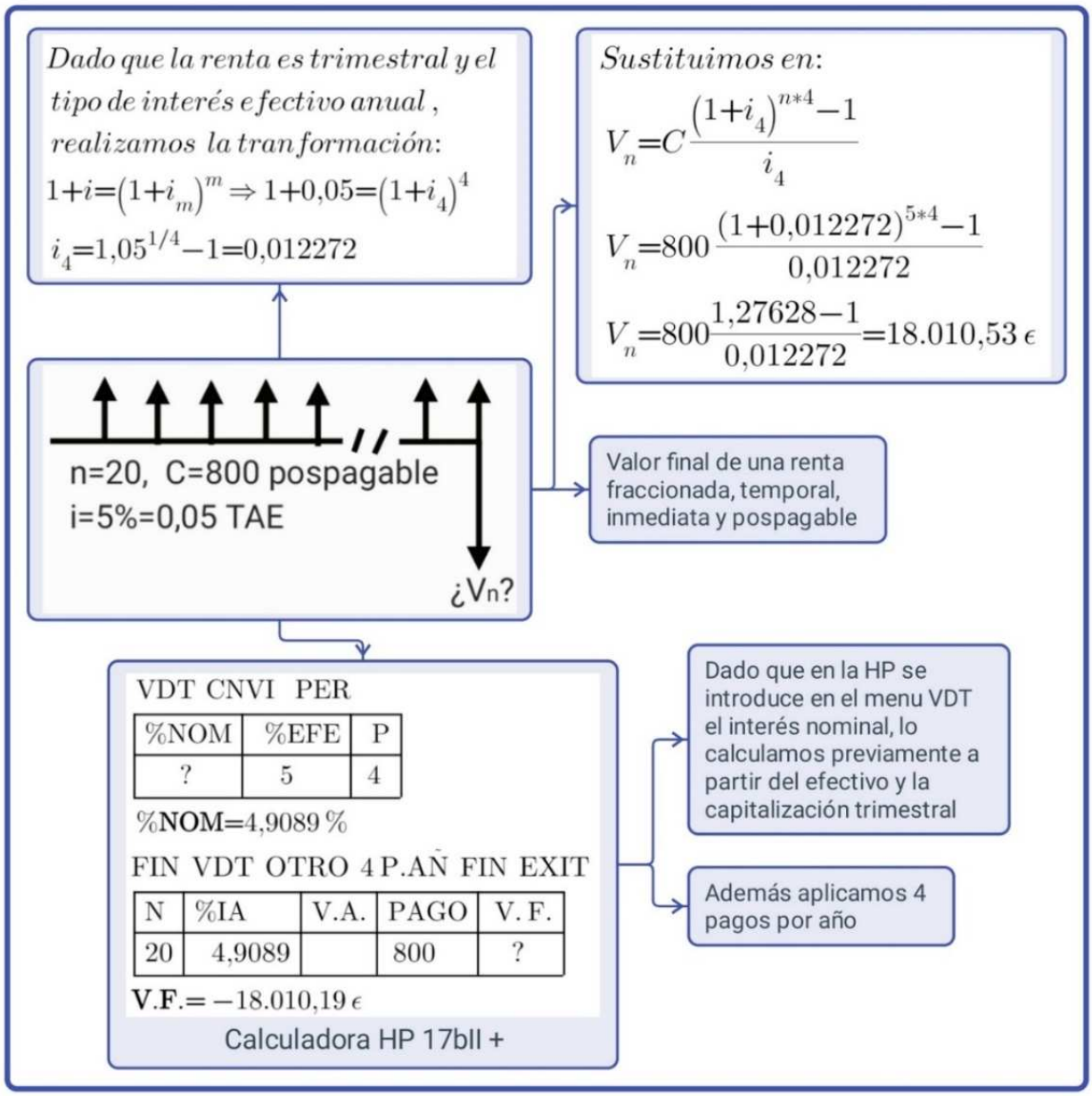
Se realiza con la fórmula correspondiente, con la calculadora y con Excel. Con estos últimos configuramos previamente los pagos a final de cada subperíodo.

7.- Martín ha contratado un plan de ahorro a 9 años al 5 % de interés compuesto. Durante los 5 primeros aportó 1.000 € a principios de cada año y los últimos 4 no realiza ninguna aportación. ¿Cuál es el saldo del plan al final del período?



El hecho de que los últimos 4 años no realice ninguna aportación convierta la operación en una renta anticipada, porque se valora en un momento posterior al del último pago periódico. Tenemos una fórmula para calcular su valor final. Con la calculadora y Excel es necesario realizar dos pasos. Primero, el VF hasta el momento final de los pagos, y segundo, el VF al vencimiento del plan de ahorro.

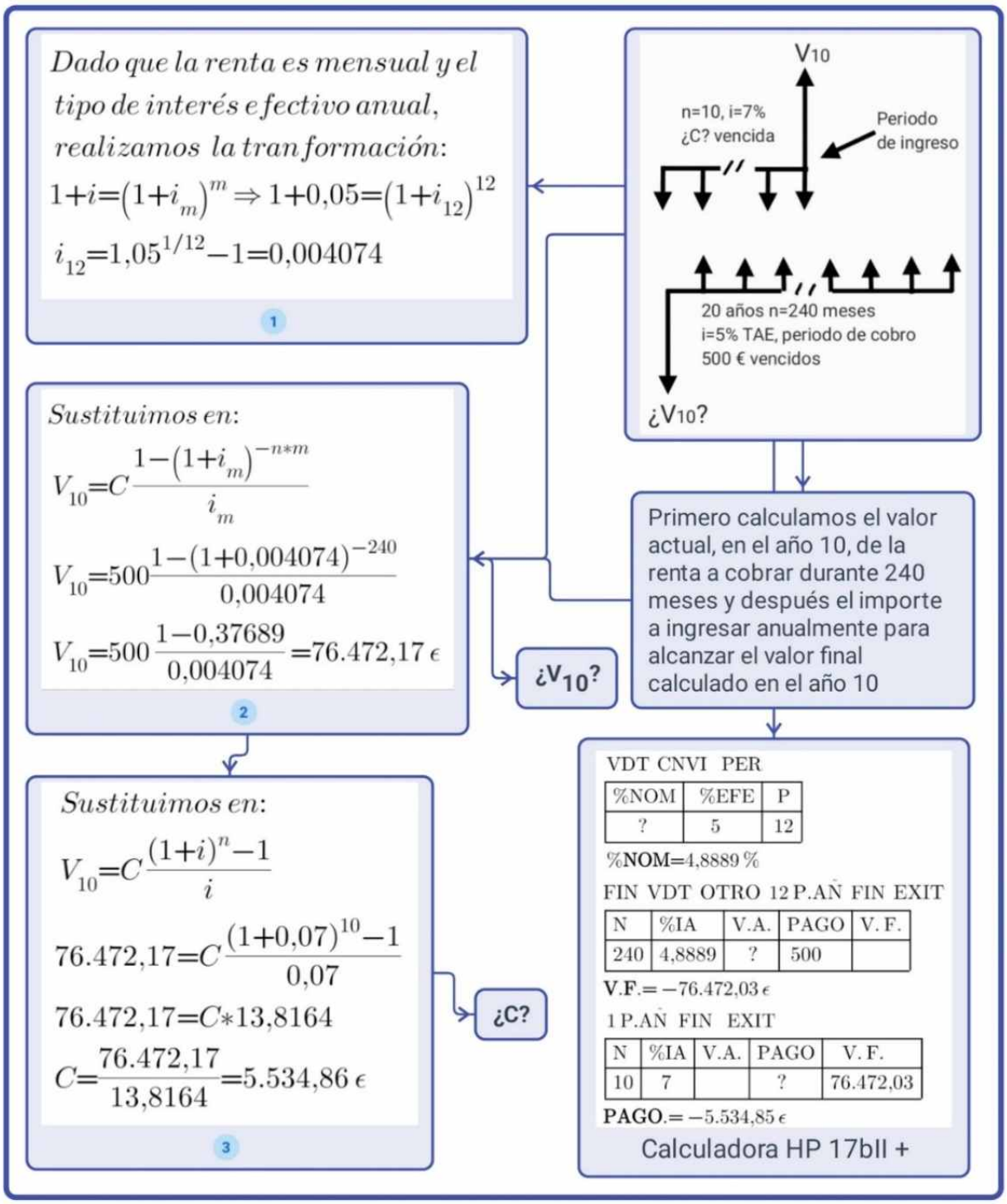
8.- Calcula el valor final de 5 años, de una renta de 800 € trimestrales vencidos, al 5 % de interés TAE.



En la calculadora se introducen tipos de interés nominales, por ello es necesario realizar la conversión a partir del efectivo.

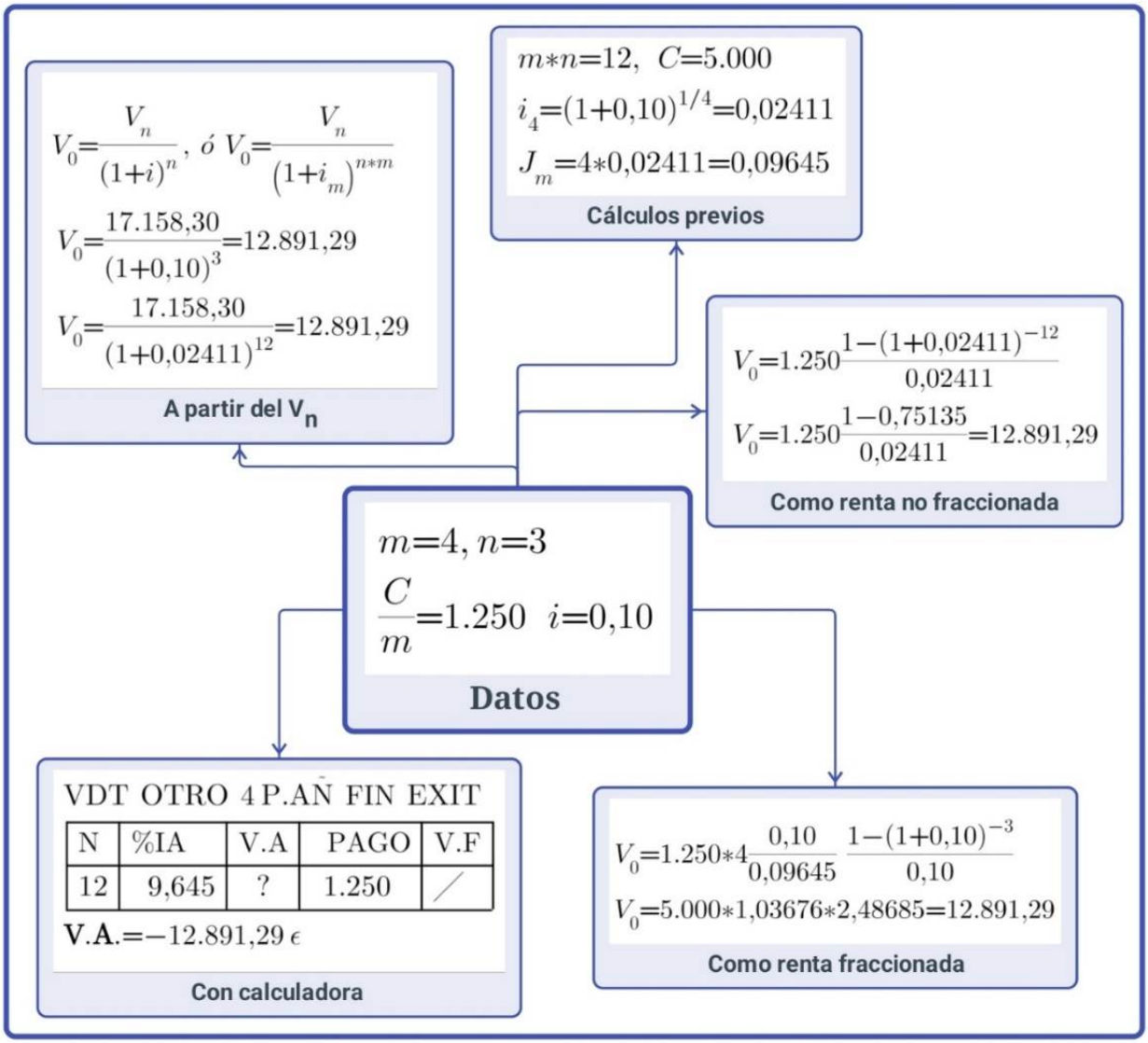
También se puede calcular mediante $J_m=i_m*m$. (4,9089=0,01227*4).

9.- ¿Qué cantidad tenemos que ingresar en un plan de ahorro, durante 10 años, al final de cada año, al 7 % TAE, para percibir después, durante 20 años, una renta de 500 € al final de cada mes, al 5 % TAE?

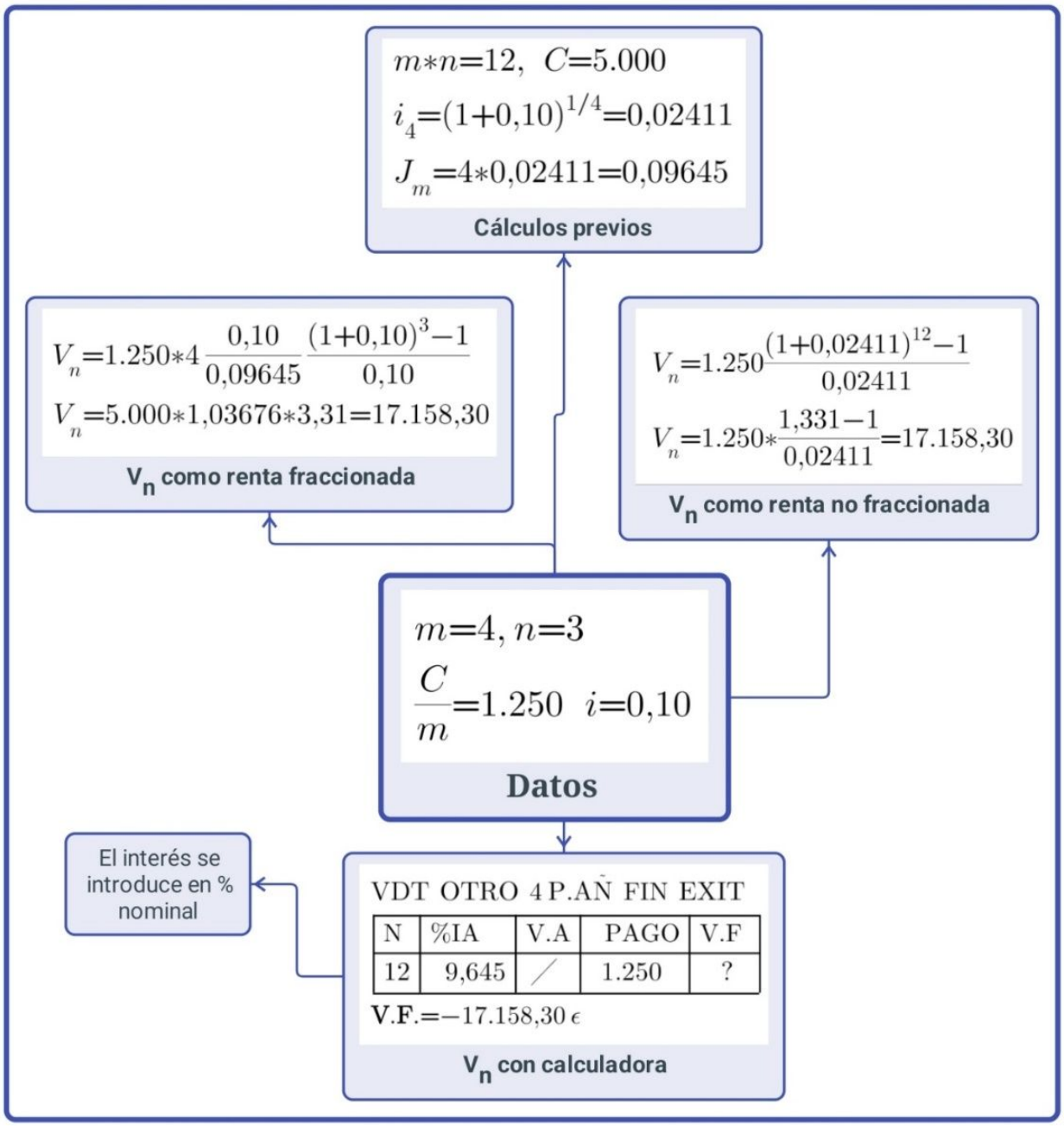


10.- Dada una renta de $1.250 €$ trimestrales, al tipo de interés de $10\ \%$ efectivo anual y 3 años de duración.

Utilizando las fórmulas explicadas en el mapa (60), calcula el valor actual de la renta.



11.- **Con los datos del ejemplo anterior y las fórmulas del mapa (61), calcula el valor final de la renta dentro de tres años.**



BLOQUE CUARTO – RENTABILIDAD

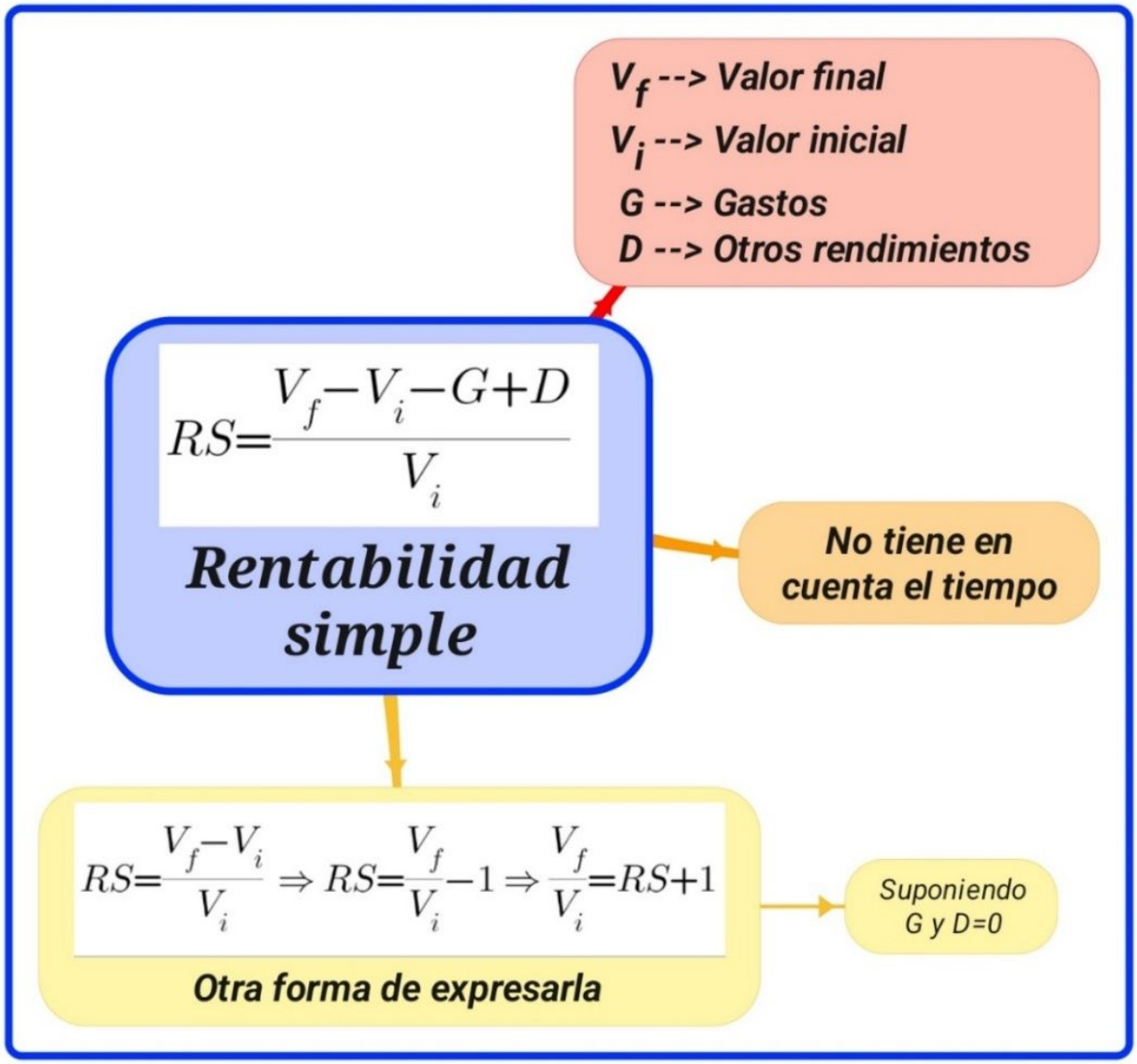
El dinero es como un brazo o una pierna: o se usa o se pierde.

HENRY FORD

Piensa constantemente cómo podrías hacer mejor las cosas.

ELON MUSK

63 Rentabilidad simple



La rentabilidad simple absoluta de un activo concreto es el resultado de sumar al precio final otros rendimientos menos el precio inicial y los gastos imputables a la operación.

La rentabilidad simple relativa es el resultado de dividir la rentabilidad absoluta entre el precio inicial del activo, como se indica en la fórmula central del mapa.

Una característica de la rentabilidad simple es que no tiene en cuenta el período de tiempo en el que se ha generado. No se expresa por unidades de tiempo.

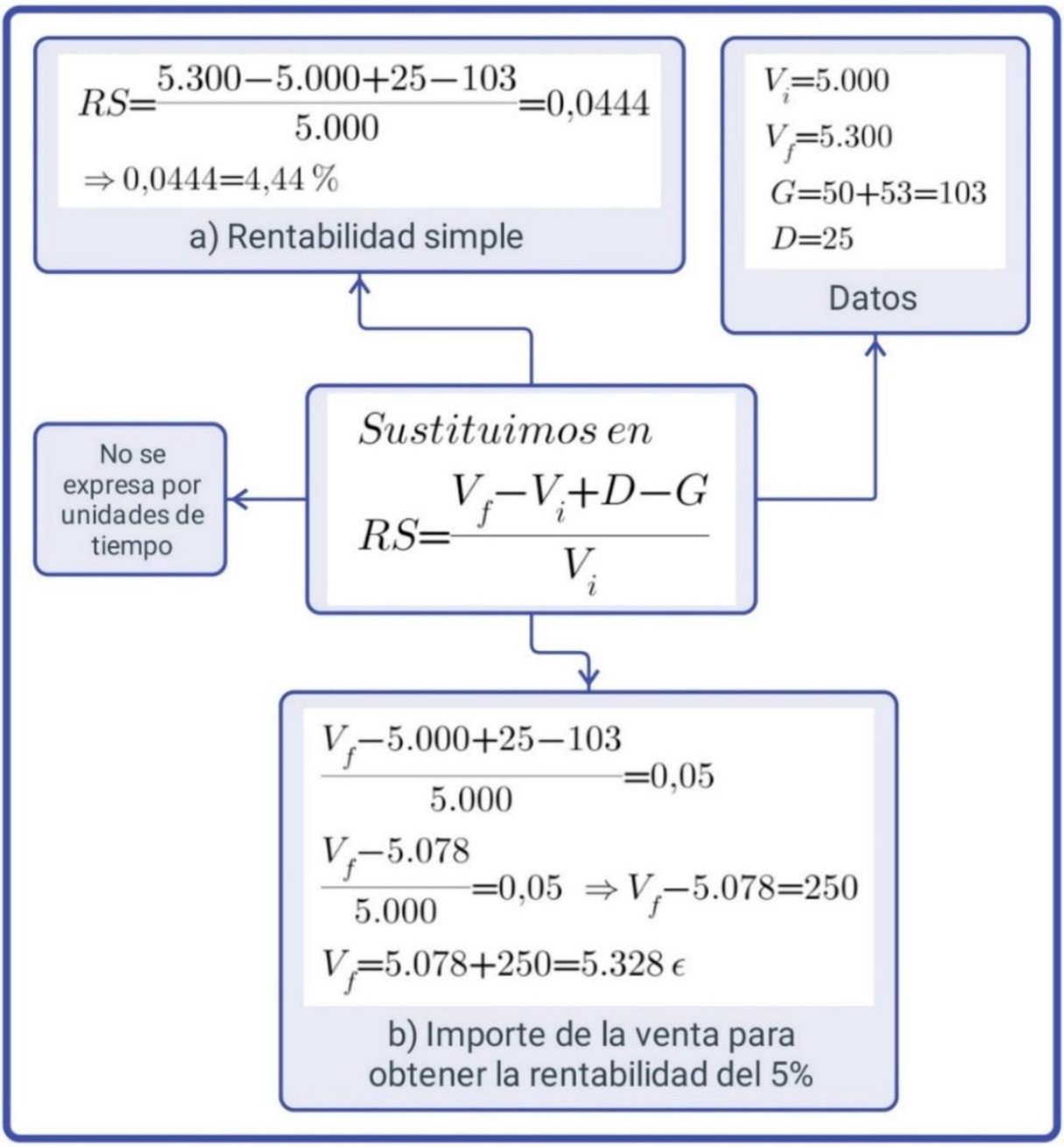
La fórmula de la parte inferior del mapa, expresa la rentabilidad en el caso de ausencia de gastos y otros rendimientos, obteniendo como conclusión que el cociente entre el valor inicial y el final es igual a la RS+1.

***

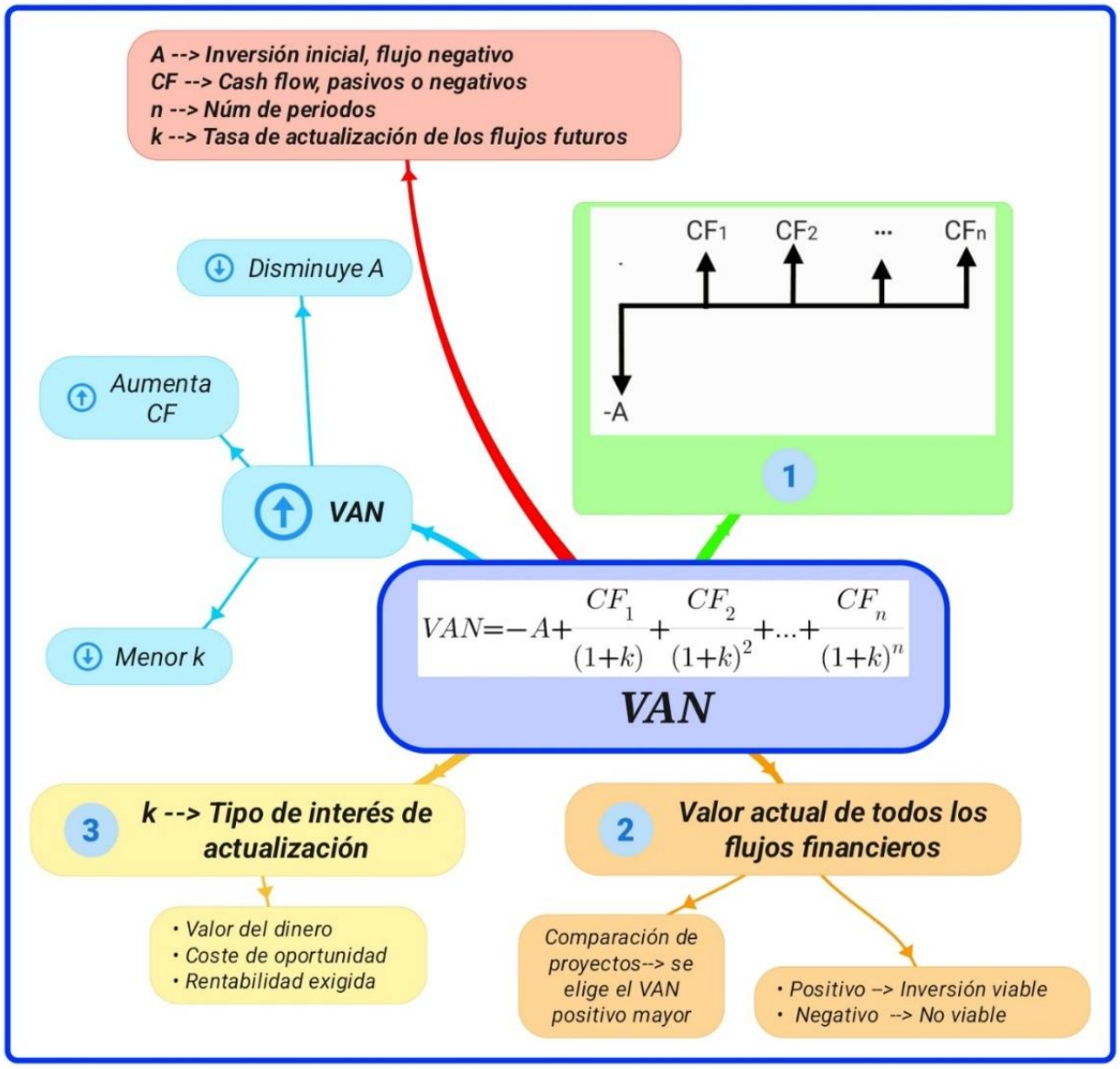
64 Ejemplo sobre rentabilidad simple

Una persona invierte 5.000 € en acciones de una empresa. A los tres meses cobra un dividendo de 25 € y a los seis las vende por 5.300 €. En esta operación ha tenido 50 € de gastos por la compra y 53 € por la venta. Calcula la rentabilidad simple.

¿En cuánto tendría que haber vendido las acciones para obtener una rentabilidad del 5 %?


$RS=\frac{5.300-5.000+25-103}{5.000}=0,0444$
$\Rightarrow 0,0444=4,44\,\%$
a) Rentabilidad simple
$V_i=5.000$
$V_f=5.300$
$G=50+53=103$
$D=25$
Datos
No se expresa por unidades de tiempo
$Sustituimos\ en$
$RS=\frac{V_f-V_i+D-G}{V_i}$
$\frac{V_f-5.000+25-103}{5.000}=0,05$
$\frac{V_f-5.078}{5.000}=0,05 \Rightarrow V_f-5.078=250$
$V_f=5.078+250=5.328\,\epsilon$
b) Importe de la venta para obtener la rentabilidad del 5%

65 Valor actual neto, VAN



(1) **Diagrama.** Representa una inversión, donde (A) es el importe de la inversión y, por lo tanto, una salida de dinero, por ello se indica en negativo y con una flecha hacia abajo. CF *(cash-flow),* es una serie de flujos de caja previstos, futuros, que suponemos positivos. Se indican con una flecha hacia arriba. Y tienen como objetivo la recuperación de la inversión.

(2) **Concepto**. El VAN es el valor actual neto de todos los flujos financieros esperados, descontados mediante la ley de descuento racional compuesto.

Si el resultado de VAN es positivo podemos afirmar que la inversión es viable o recomendable, si es negativo, no es viable porque se obtendrían pérdidas.

Una aplicación interesante se encuentra en la comparación entre varios proyectos de inversión. Se calcula el VAN de cada uno de ellos y se elige el proyecto con un VAN positivo superior. Cada proyecto tendrá una inversión y flujos de caja propios, pero el tipo de interés de descuento será el mismo para todos los proyectos comparados.

(3) **Tipo de interés de descuento o actualización (k)**. Se define como el precio del dinero, el coste de la financiación, o el coste de oportunidad (por ejemplo, el tipo de interés de una inversión financiera alternativa), o la rentabilidad mínima exigida por el inversor.

Con la simple observación de la fórmula del VAN, podemos ver que este aumenta cuando es menor el valor del coste del capital (k), aumenta el valor positivo de los flujos de caja, y disminuye el importe de la inversión (A), manteniendo el resto de parámetros sin variación.

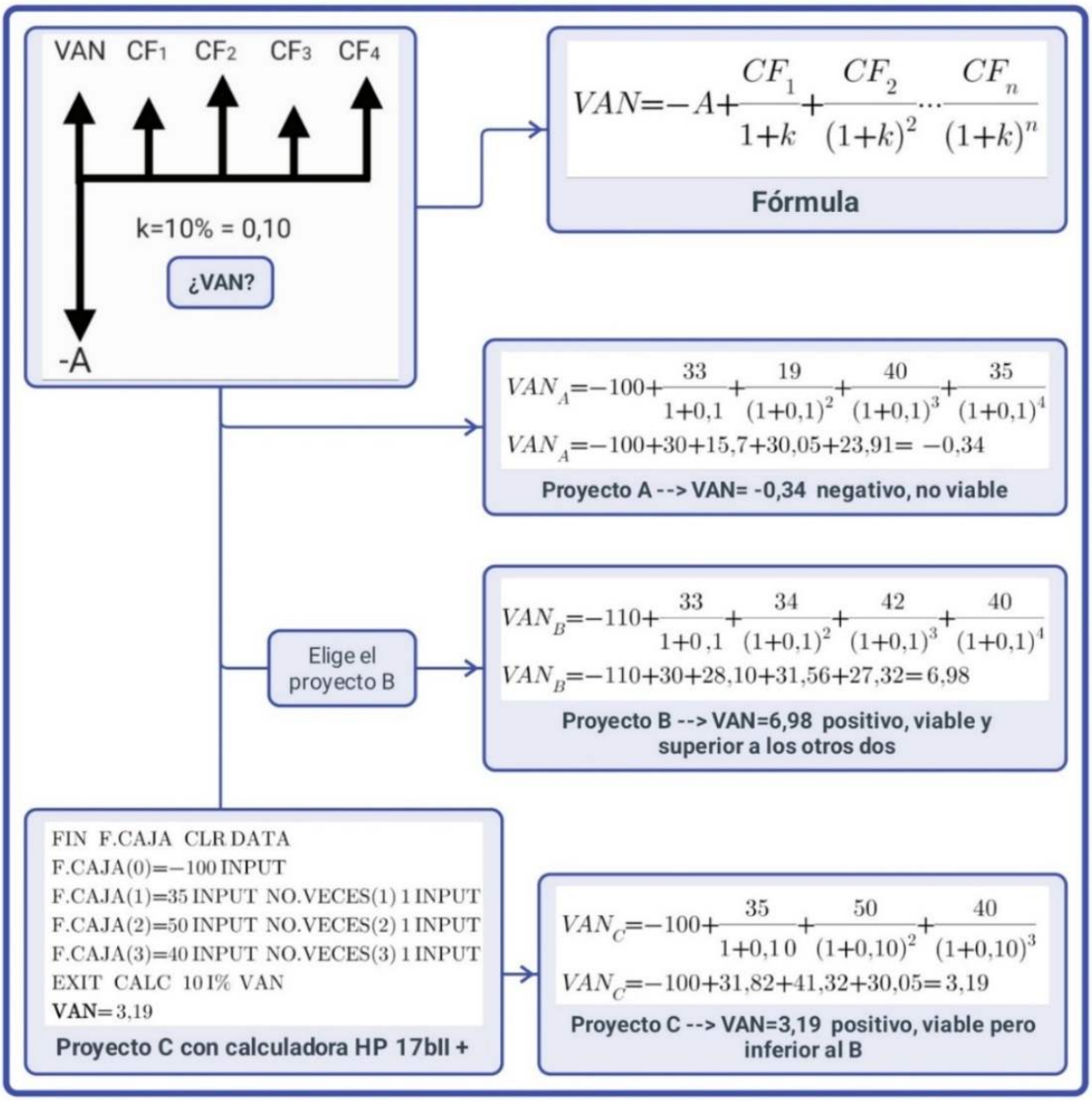
***

66 Ejemplo sobre cálculo del VAN

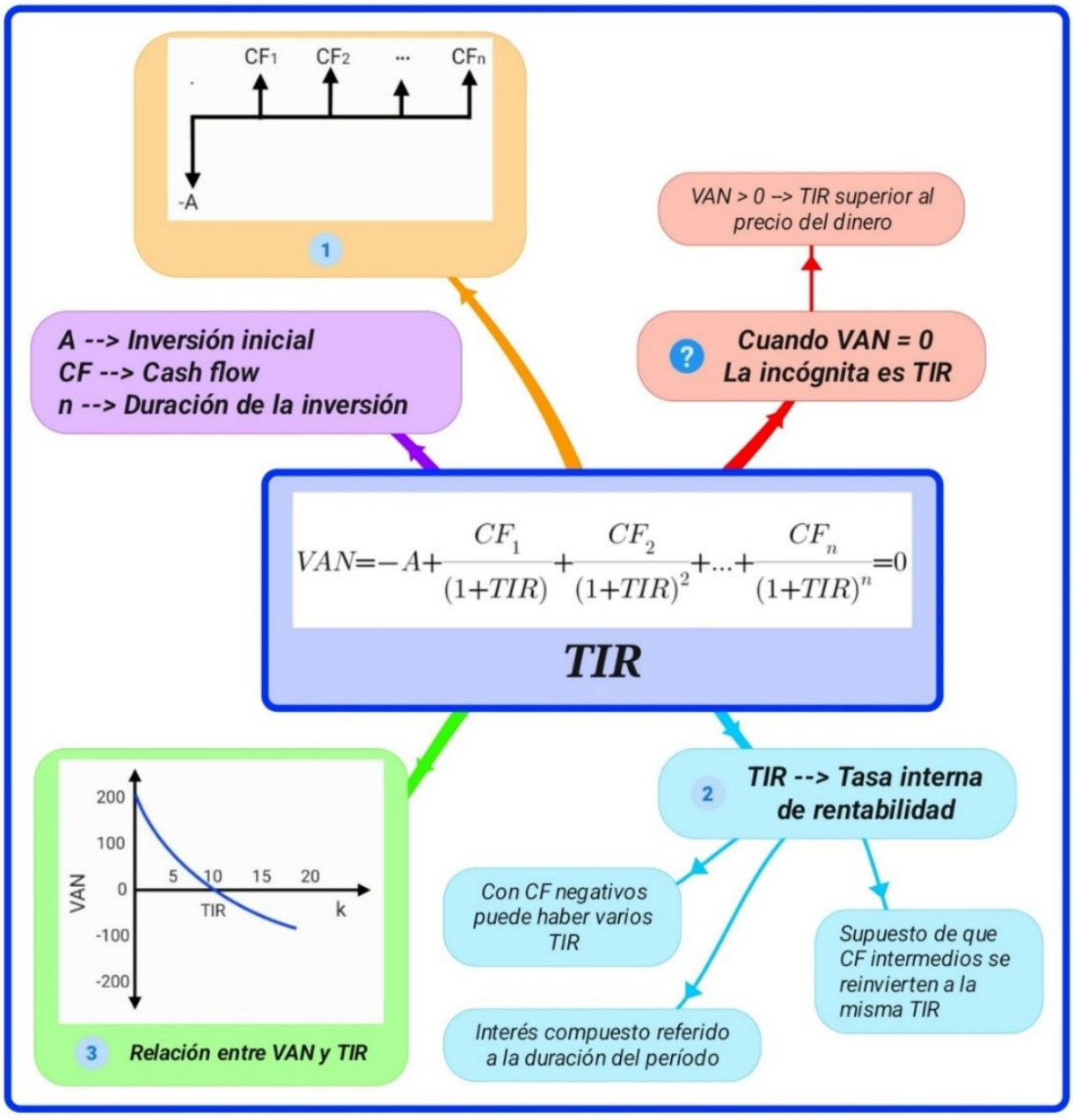
Una empresa está analizando la elección entre tres proyectos con los siguientes datos en miles de euros. Flujos de caja anuales e interés del 10 % anual.

1. **Inversión 100, CF_1=33, CF_2=19, CF_3=40, CF_4=35**
2. **Inversión 110, CF_1=33, CF_2=34, CF_3=42, CF_4=40**
3. **Inversión 100, CF_1=35, CF_2=50, CF_3=40**

Calcula el VAN de los tres proyectos y elige la opción más viable.


VAN CF1 CF2 CF3 CF4
k=10% = 0,10
¿VAN?
-A
$VAN = -A + \frac{CF_1}{1+k} + \frac{CF_2}{(1+k)^2} \cdots \frac{CF_n}{(1+k)^n}$
Fórmula
$VAN_A = -100 + \frac{33}{1+0,1} + \frac{19}{(1+0,1)^2} + \frac{40}{(1+0,1)^3} + \frac{35}{(1+0,1)^4}$
$VAN_A = -100+30+15,7+30,05+23,91 = -0,34$
Proyecto A --> VAN= -0,34 negativo, no viable
Elige el proyecto B
$VAN_B = -110 + \frac{33}{1+0,1} + \frac{34}{(1+0,1)^2} + \frac{42}{(1+0,1)^3} + \frac{40}{(1+0,1)^4}$
$VAN_B = -110+30+28,10+31,56+27,32 = 6,98$
Proyecto B --> VAN=6,98 positivo, viable y superior a los otros dos
FIN F.CAJA CLR DATA
F.CAJA(0)=−100 INPUT
F.CAJA(1)=35 INPUT NO.VECES(1) 1 INPUT
F.CAJA(2)=50 INPUT NO.VECES(2) 1 INPUT
F.CAJA(3)=40 INPUT NO.VECES(3) 1 INPUT
EXIT CALC 10 I% VAN
VAN= 3,19
Proyecto C con calculadora HP 17bII +
$VAN_C = -100 + \frac{35}{1+0,10} + \frac{50}{(1+0,10)^2} + \frac{40}{(1+0,10)^3}$
$VAN_C = -100+31,82+41,32+30,05 = 3,19$
Proyecto C --> VAN=3,19 positivo, viable pero inferior al B

67 Tasa interna de rentabilidad, TIR



(1) **Diagrama**. Es similar al del VAN. La inversión se indica con una flecha hacia abajo porque es una salida de dinero, y los flujos de caja (CF, *cash-flow*) con flechas hacia arriba porque representan entradas previstas de dinero.

Para entender la TIR partimos de la fórmula del VAN, y decimos que la TIR es la tasa de interés que da como resultado: VAN=0. Por lo tanto, conocido el importe de la inversión y los flujos de caja esperados, la incógnita es el tipo de interés de descuento.

(2) **Supuestos.** La aplicación de la TIR exige de varios supuestos y tiene algunos inconvenientes:

- ✓ En primer lugar, se supone que los flujos de caja intermedios se reinvierten a la misma tasa TIR.
- ✓ Si existen flujos de caja positivos y negativos, el despeje de la TIR puede tener varios resultados.
- ✓ La TIR es una tasa de descuento referida a la periodicidad de los flujos de caja, por lo que habrá que transformarla en la tasa anual equivalente (TAE) para poder realizar comparaciones.

(3) **Comparación**. En este gráfico comparamos la TIR con el VAN. Observamos que cuando la tasa de descuento (k) es inferior a la TIR el VAN es positivo y cuando (k) es superior, el VAN es negativo.

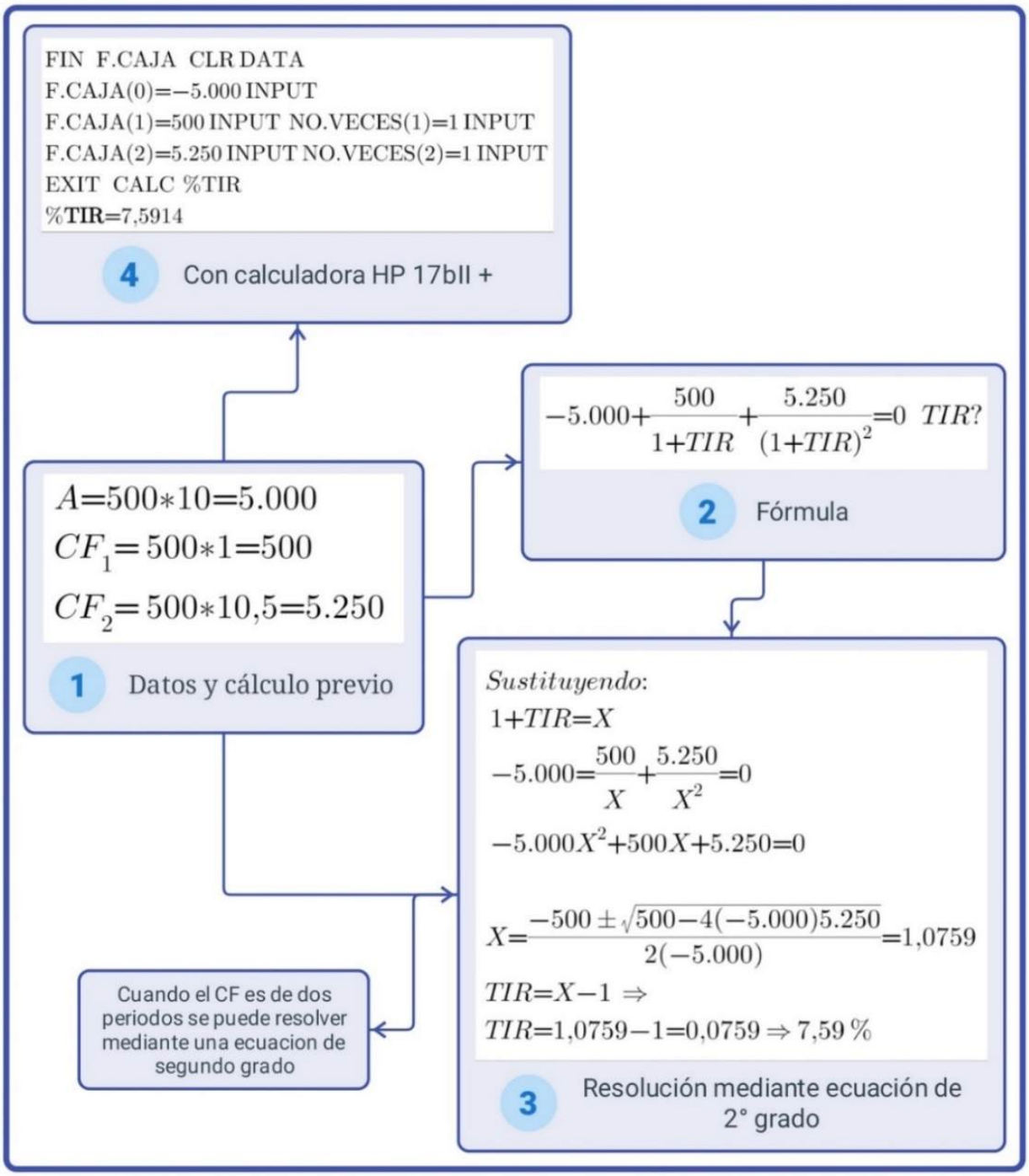
El cálculo de la TIR a medida que aumenta el número de períodos que dura la inversión puede ser laborioso. Hasta dos períodos se puede resolver transformando las variables en una ecuación de segundo grado, mientras que para más períodos es necesario efectuar aproximaciones y tanteos o buscar el tipo TIR mediante la interpolación lineal.

En el ejemplo (68.1) calcularemos la TIR mediante una ecuación de 2.º grado y los siguientes con la calculadora financiera.

***

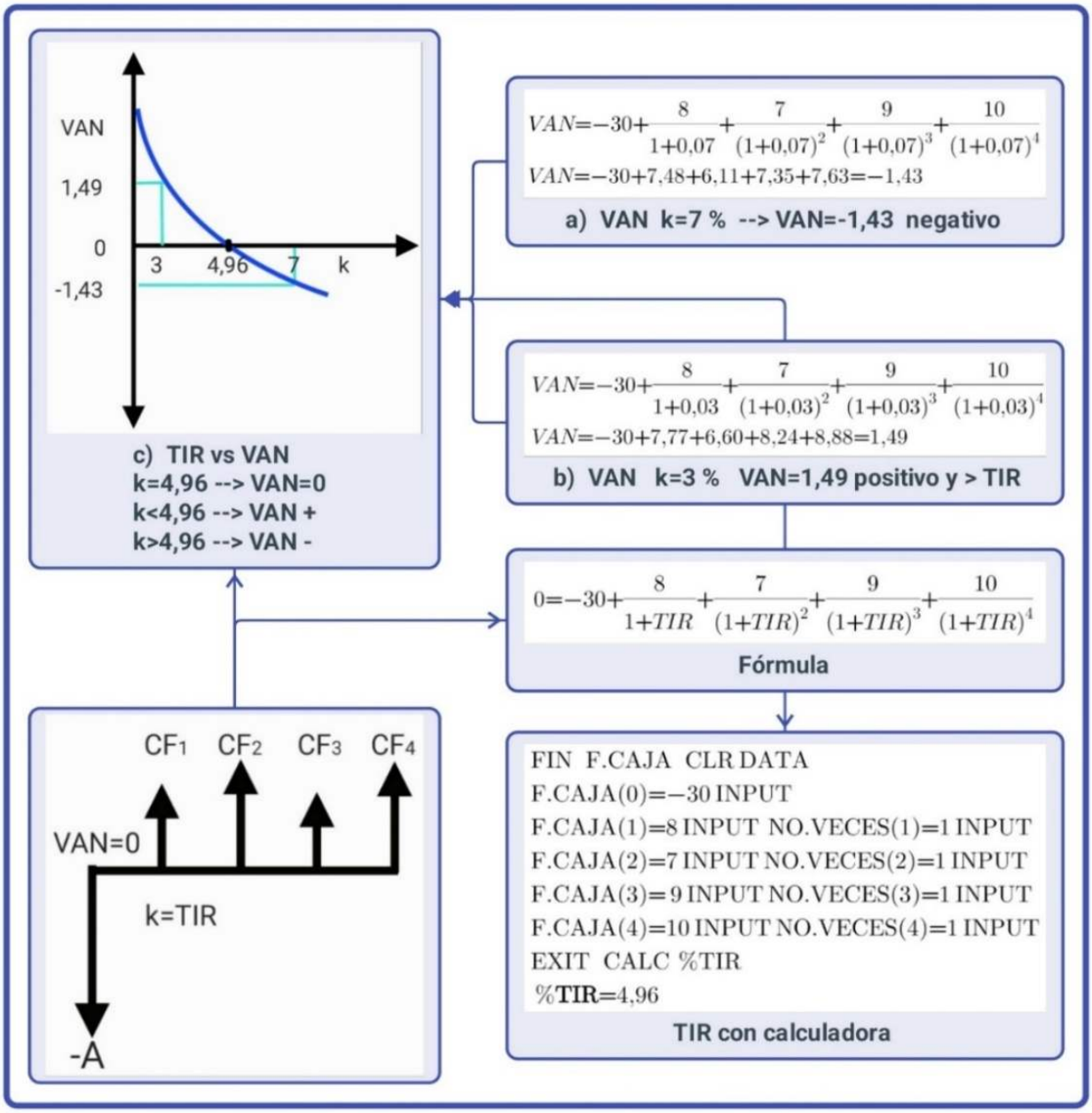
68 Ejemplos sobre cálculo de la TIR

1.- Hace dos años un inversor compró 500 acciones de una empresa a 10 € cada una. Al año recibió un dividendo de 1 € por acción. Hoy las ha vendido por 10,50 € cada una. ¿Cuál es la rentabilidad obtenida en términos TIR?


FIN F.CAJA CLR DATA
F.CAJA(0)=−5.000 INPUT
F.CAJA(1)=500 INPUT NO.VECES(1)=1 INPUT
F.CAJA(2)=5.250 INPUT NO.VECES(2)=1 INPUT
EXIT CALC %TIR
%TIR=7,5914
4 Con calculadora HP 17bII +
$-5.000+\frac{500}{1+TIR}+\frac{5.250}{(1+TIR)^2}=0 \quad TIR?$
2 Fórmula
$A=500*10=5.000$
$CF_1=500*1=500$
$CF_2=500*10,5=5.250$
1 Datos y cálculo previo
Sustituyendo:
$1+TIR=X$
$-5.000=\frac{500}{X}+\frac{5.250}{X^2}=0$
$-5.000X^2+500X+5.250=0$
$X=\frac{-500\pm\sqrt{500-4(-5.000)5.250}}{2(-5.000)}=1,0759$
$TIR=X-1 \Rightarrow$
$TIR=1,0759-1=0,0759\Rightarrow 7,59\,\%$
3 Resolución mediante ecuación de 2° grado
Cuando el CF es de dos periodos se puede resolver mediante una ecuacion de segundo grado

2.- Consideremos un proyecto de inversión con los siguientes datos anuales en miles de euros: Inversión de 30, CF_1=8, CF_2= 7, CF_3=9, CF_4=10.

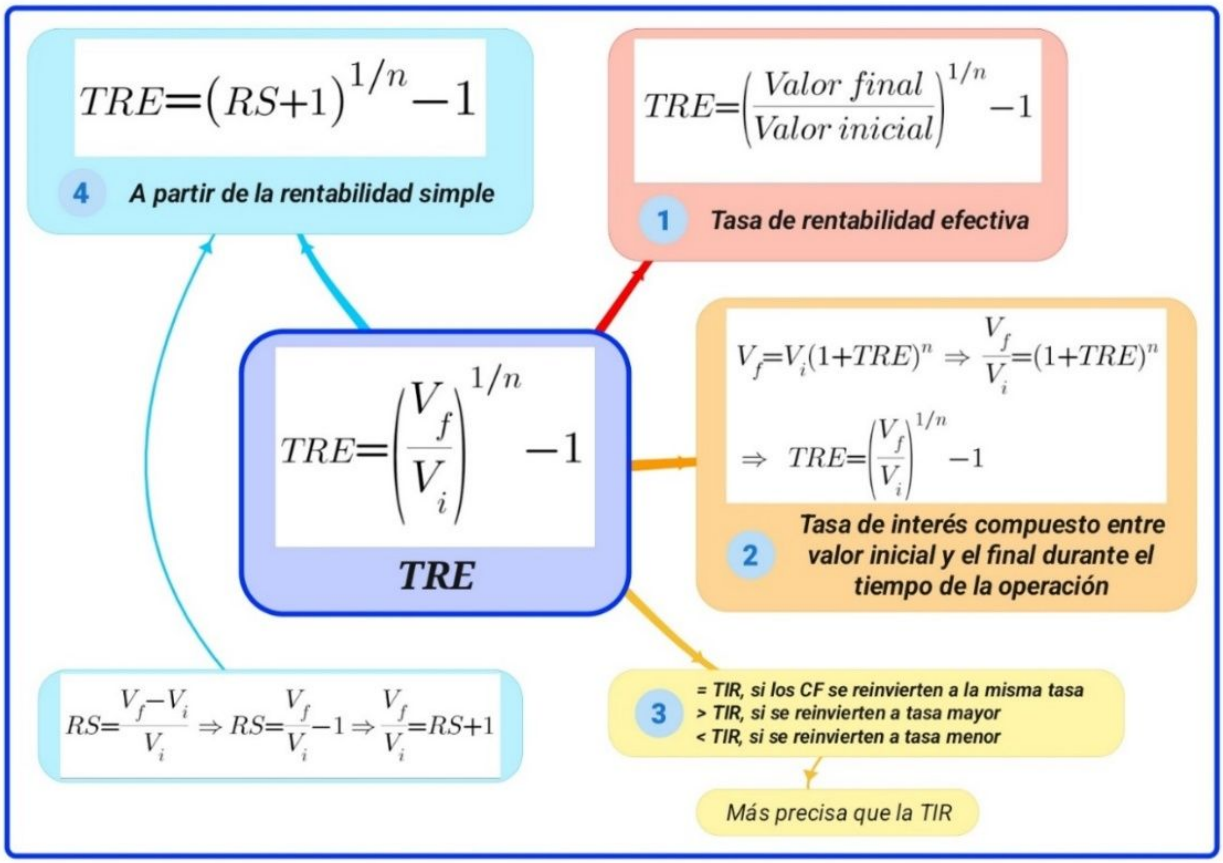
Calcula el VAN al tipo de interés del 7 % y del 3 %, así como la TIR, para realizar la comparación entre los dos criterios de selección de inversiones.



La tasa interna de rentabilidad la obtenemos con calculadora, y es TIR=4,96 anual. En el gráfico observamos el comportamiento del VAN en función de si (k) es superior, inferior o igual a la TIR.

***

69 Tasa de rentabilidad efectiva, TRE



(1) **Fórmula**. Esta es la fórmula de la tasa de rentabilidad efectiva anual.

(2) **Deducción.** Se obtiene despejando el tipo de interés en la fórmula de interés compuesto, pero en este caso representado por la TRE. (Rama 3 del mapa 28).

- ✓ Planteamos la ecuación de capitalización compuesta.
- ✓ Pasamos V_i al primer miembro dividiendo.
- ✓ Aplicando la potencia inversa de (n), igual 1/n, a ambos miembros, nos queda $(V_f/V_i)^{1/n} = 1+TRE$
- ✓ Despejamos, $TRE=(V_f/V_i)^{1/n}-1$.

(3) **Comparación con la TIR**. Como indicamos en mapas anteriores, la TIR es la tasa referida al período en el que se generan los flujos de caja. Tenemos que convertirla a una tasa anual, para realizar comparaciones.

- ✓ Si la TRE es igual a la TIR anualizada, significa que los rendimientos intermedios generados se reinvierten a la misma TIR.
- ✓ Si es superior a la TIR anualizada, los rendimientos se reinvierten a una tasa superior.
- ✓ Si es menor que la TIR analizada, los rendimientos se reinvierten a una tasa menor que la TIR.

En consecuencia, la TRE es más precisa que la TIR y nos indica la rentabilidad efectiva de una inversión.

La TRE es una tasa muy útil para calcular cualquier rentabilidad simplemente conociendo la inversión inicial, el valor final y el tiempo que dura la operación.

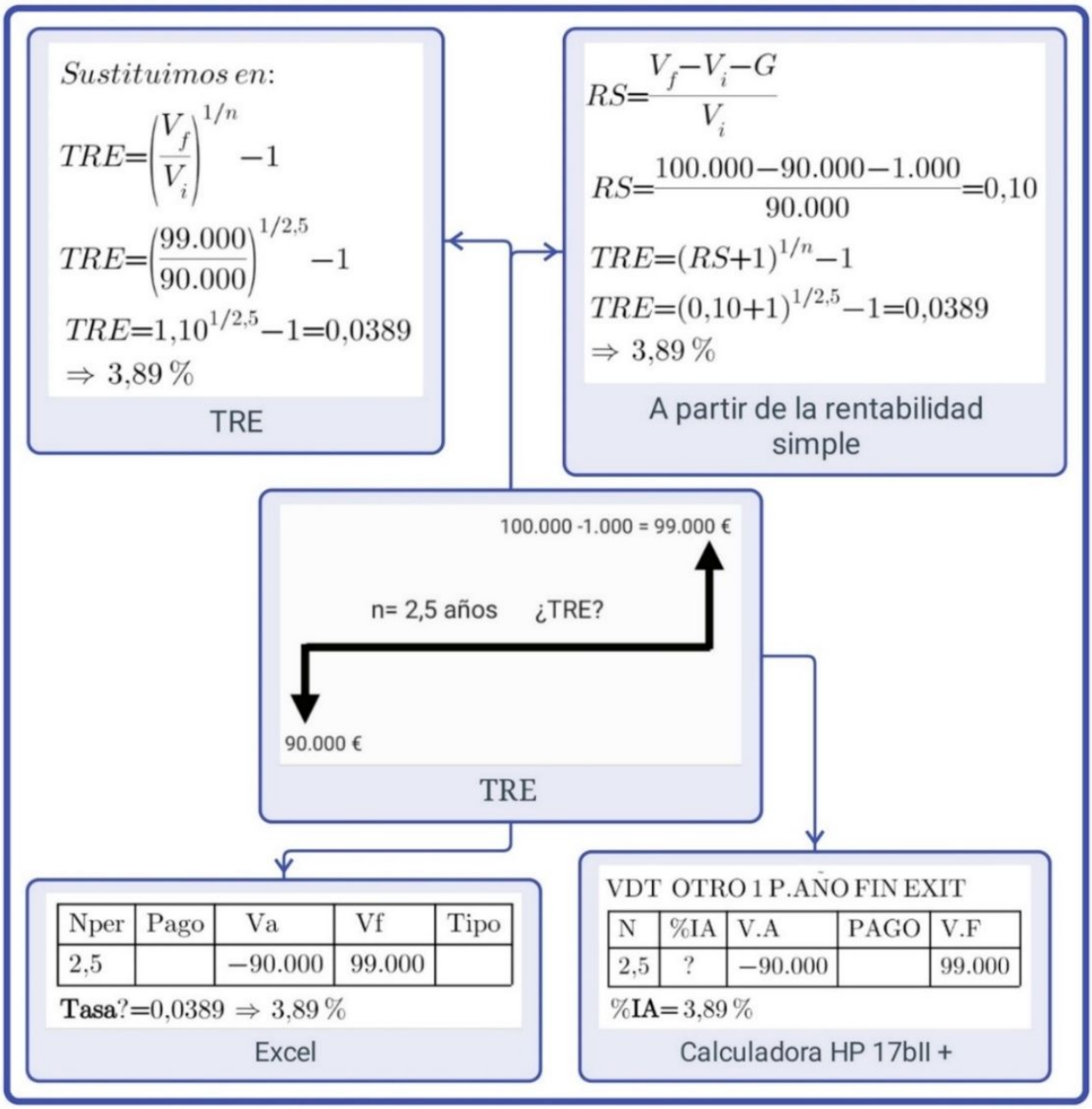
También se puede emplear para calcular tasas de crecimiento tendenciales, por ejemplo, el crecimiento de las ventas de una empresa o la tasa de crecimiento del PIB de un país.

(4) **A partir de la rentabilidad simple.** Otra opción es analizar la TRE en relación con la rentabilidad simple. Partimos de la fórmula que vimos en el mapa (63), en la que el cociente entre valor final y el valor inicial es igual a RS+1. Sustituimos Vf/Vi por RS+1 para obtener la fórmula de la TRE en función de la rentabilidad simple y el tiempo de la inversión.

***

70 Ejemplo de cálculo TRE

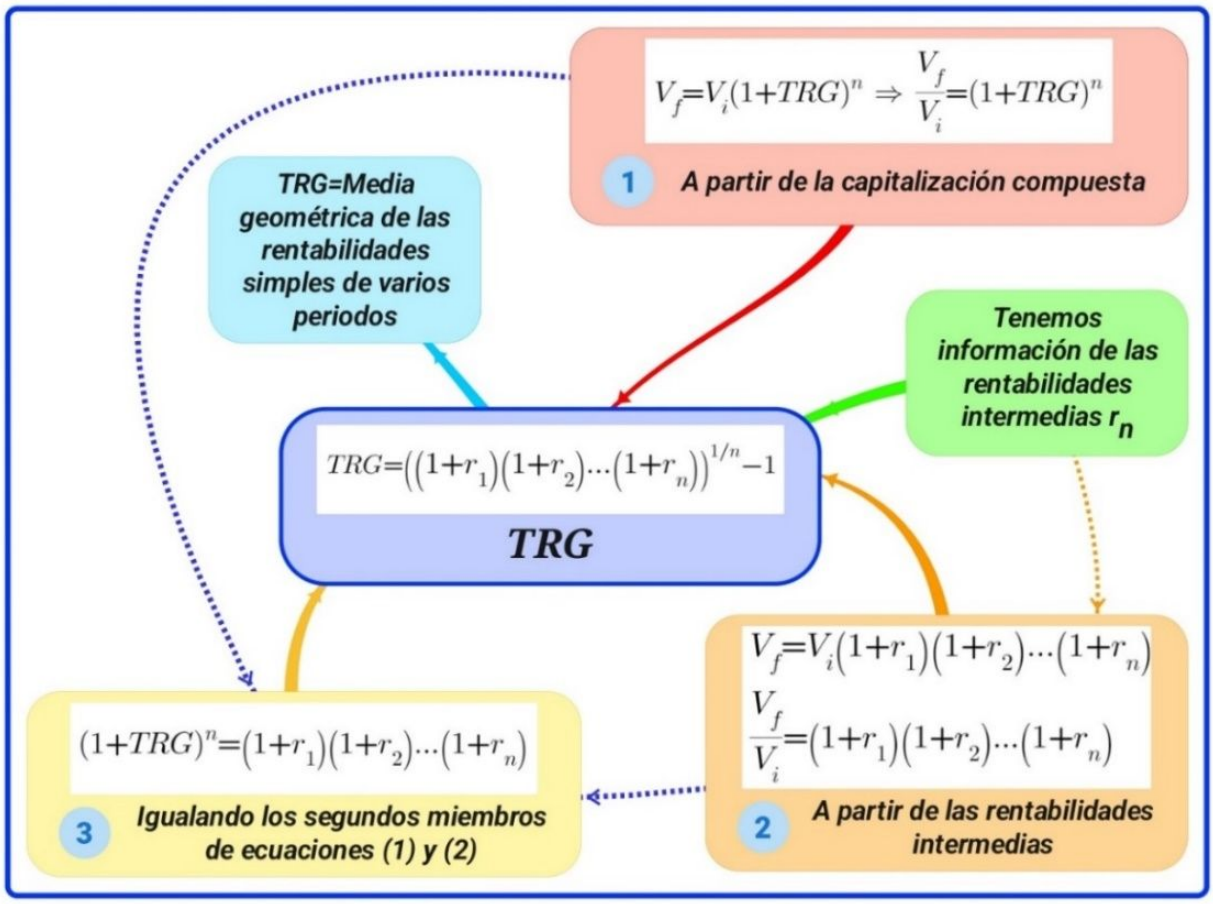
Hemos vendido un inmueble por 100.000 € qué adquirimos hace dos años y medio por 90.000 €. En el momento de la venta pagamos 1.000 € de impuestos. Calcula la rentabilidad efectiva.



También se puede resolver con la función de Excel, RRI=(Nper;Va;Vf).

***

71 Tasa de rentabilidad geométrica, TRG



Deducimos la fórmula de la TRG en la parte central del mapa mediante los siguientes pasos:

(1) **Paso uno.** Por una parte, la TRG es el tipo de interés compuesto de una inversión sobre la que conocemos el valor final, el inicial y el tiempo de duración expresado en años. A partir de la fórmula de interés compuesto, dividimos entre Vi, para obtener la exprexión $Vf/Vi=(1+TRG)^n$.

(2) **Paso dos**. Por otra parte, y considerando que conocemos las rentabilidades intermedias a lo largo de la vida de una inversión, podemos obtener el Vf a partir del valor inicial, multiplicando de forma

sucesiva por $(1+r_n)$, donde r_n es el rendimiento de cada año en tanto por uno.

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por Vi, obtenemos que Vf/Vi es igual al producto de las rentabilidades históricas en formato $(1+r_n)$.

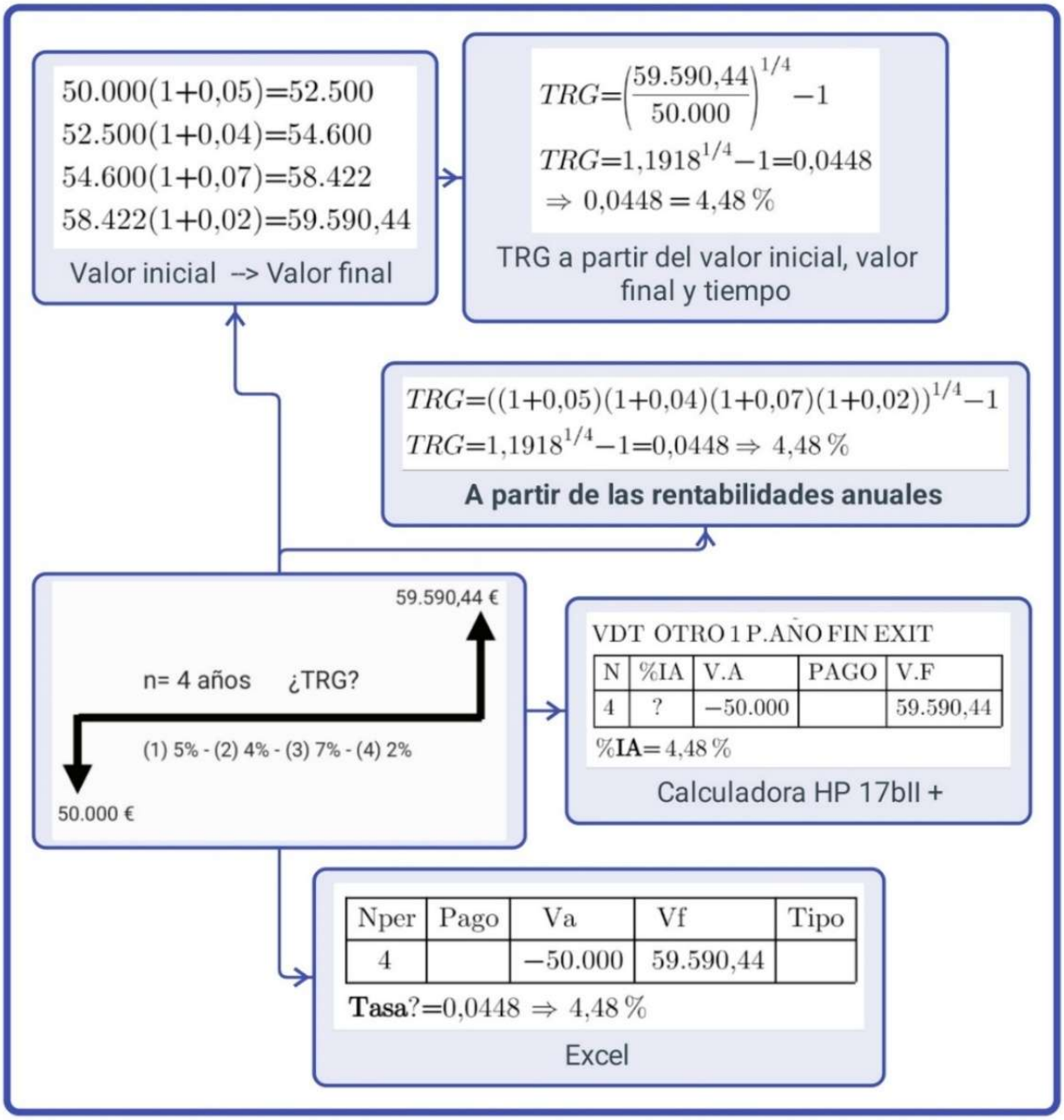
(3) **Paso tres.** Dado que los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2) son iguales al cociente Vf/Vi, los igualamos y despejamos TRG, obteniendo la fórmula de la TRG en función de las rentabilidades intermedias de la inversión, representada en la parte central del mapa.

Por ello definimos la TRG como la media geométrica de las rentabilidades simples de los periodos que dura la inversión.

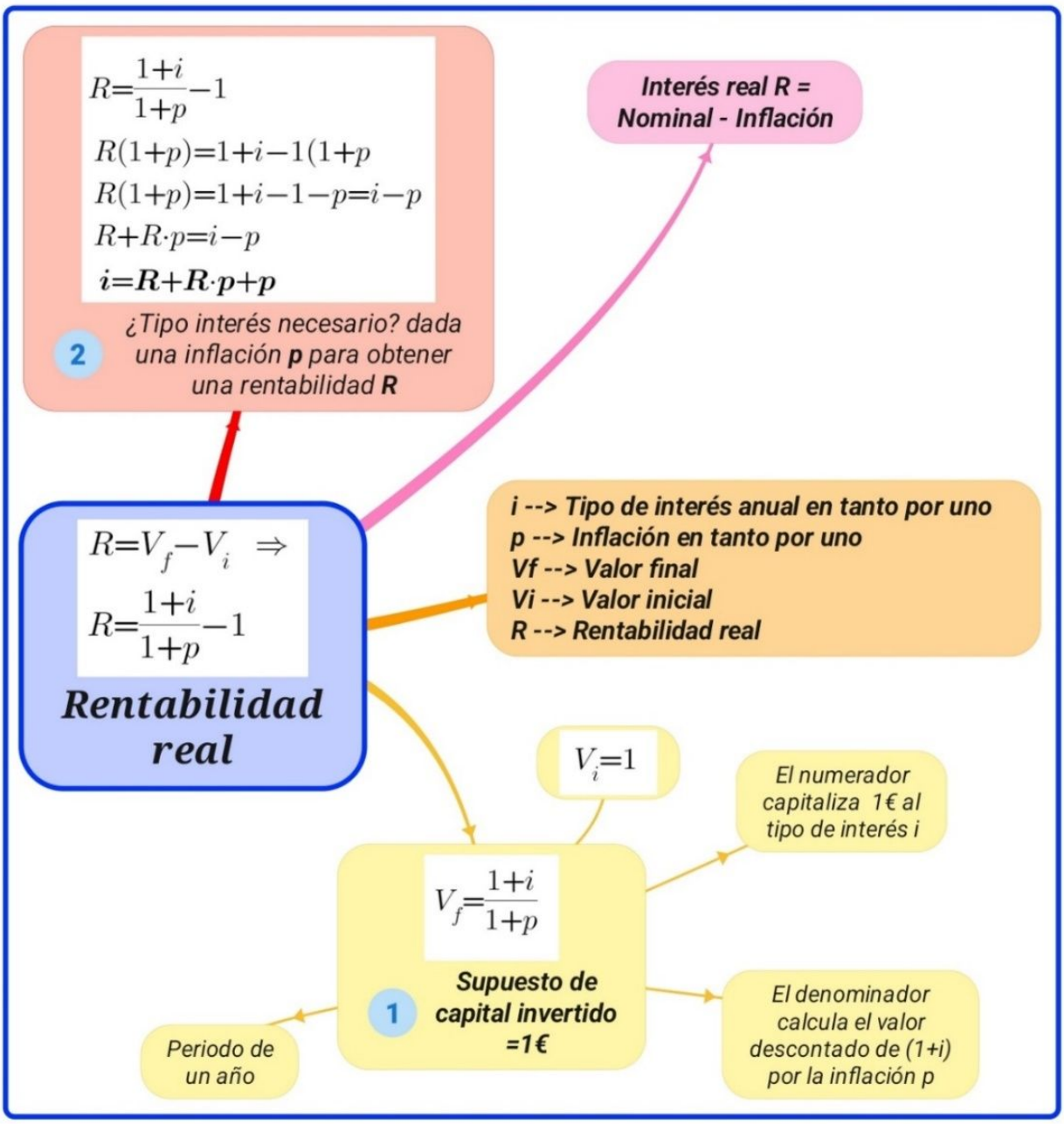
***

72 Ejemplo de cálculo TRG

Un negocio iniciado hace cuatro años con una inversión de 50.000 €, ha generado el primer año el 5 %, el segundo el 4 %, el tercero el 7 % y el cuarto el 2 %. ¿Cuál es la tasa de rentabilidad geométrica?



73 Rentabilidad real



En general, la rentabilidad real es el tipo de interés nominal menos la inflación, pero vamos a precisar más la definición.

(1) **Fórmula, a partir de la rentabilidad real de un euro**. Partimos del supuesto de la inversión de un euro durante un año,

Vi=1, para simplificar.

El valor final Vf es de un euro más el interés generado (1+i), dividido entre (1+p) para calcular el valor descontado de la inflación.

La rentabilidad es, R=Vf-Vi=Vf-1=(1+i)/(1+p)-1, que es la fórmula de la rentabilidad real que figura en parte central del mapa.

El tipo de interés e inflación están en tantos por uno. Cuando se expresen en porcentaje, simplemente los dividimos entre cien para llevar a cabo la transformación.

(2) **Interés necesario para una determinada rentabilidad**. En el caso de que queramos obtener una rentabilidad determinada (R), y dado un nivel esperado de inflación (p), a partir de la fórmula central podemos despejar el tipo de interés (i) que es necesario contratar para alcanzar la rentabilidad real deseada.

En esta rama hemos despejado la (i) que resulta: i=R+R*p+p.

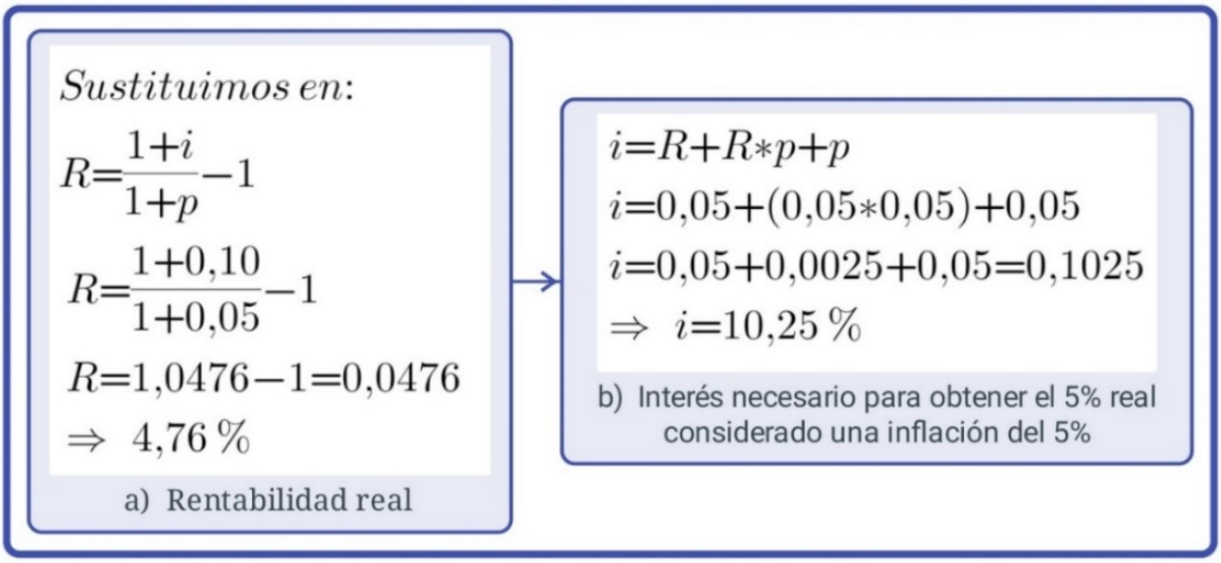
***

74 Ejemplo de cálculo rentabilidad real

Una persona ha efectuado un depósito a plazo de un año en el banco al $10\ \%$ de interés. Dado que hubo una inflación del $5\ \%$ anual, calcula:

a) La rentabilidad real, y

b) El tipo de interés al que debiera haber negociado el depósito para obtener la rentabilidad real del $5\ \%$.

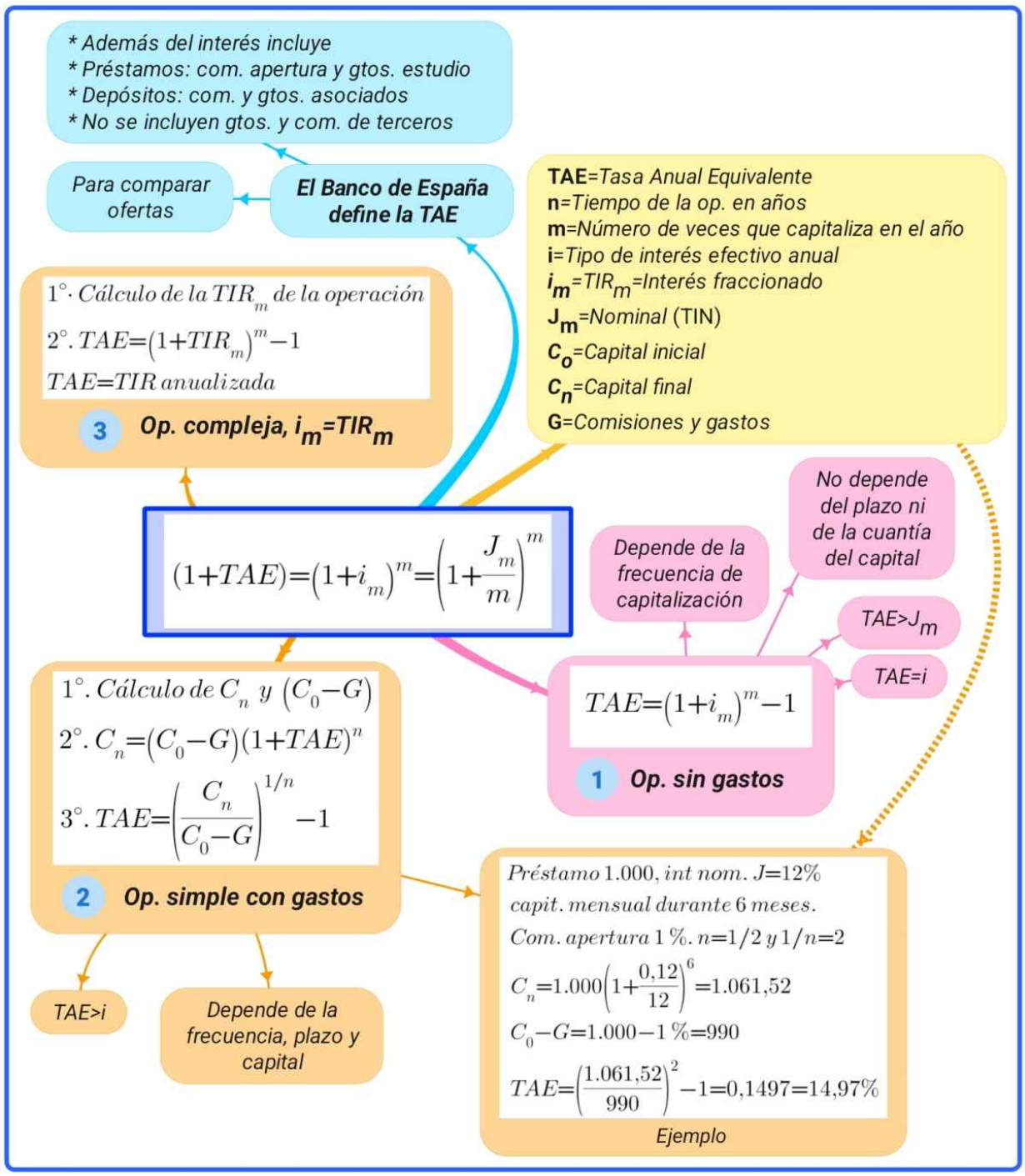


La inflación tiene un efecto negativo sobre la rentabilidad de los depósitos y las inversiones en general, por lo que el inversor exigirá una rentabilidad nominal superior para compensar la pérdida del valor del dinero.

La ecuación i=R+R*p+p establece la relación entre tipo de interés, la rentabilidad real y la inflación.

***

75 Tasa anual equivalente, TAE



El Banco de España en la Circular 5/2012 define la TAE, como:

"Tipo de interés que indica el coste o rendimiento efectivo de un producto financiero. La TAE se calcula de acuerdo con una fórmula

matemática normalizada que tiene en cuenta el tipo de interés nominal de la operación, la frecuencia de los pagos (mensuales, trimestrales, etc.), las comisiones bancarias y algunos gastos de la operación. En el caso de los créditos, no se incluyen en el cálculo del coste efectivo algunos conceptos, como los gastos que el cliente pueda evitar en uso de las facultades que le concede el contrato, los gastos que han de abonarse a terceros o los gastos por seguros o garantías".

(1) **Fórmula para operaciones sin gastos.** En el caso de que la operación no tengas gastos asociados, la TAE es igual al tipo de interés efectivo anual, y se calcula con esta fórmula. $TAE=(1+i_m)^m-1$.

La TAE depende de la frecuencia fraccionada de capitalización. A mayor frecuencia, mayor TAE. Y no depende del plazo ni de la cuantía de los capitales.

La TAE es superior al tipo de interés nominal, excepto que el plazo de capitalización sea justo el año, en donde son iguales.

(2) **Fórmula para operaciones simples con gastos.** Son operaciones simples cuando, tanto la prestación como la contraprestación constan de un solo capital. En este caso, para calcular la TAE seguimos los siguientes pasos:

1.º Calculamos el valor inicial y el final de la operación, incluyendo los gastos.

2.º Sustituimos los valores anteriores en la ecuación de equivalencia, en la que el valor final es igual al inicial multiplicado por $(1+TAE)^n$, donde (n) es el número de años, que se expresará en fracción si la operación es inferior al año o no son años exactos.

3.º En la ecuación anterior despejamos la TAE.

(3) **TAE en operaciones complejas.** Decimos operaciones complejas cuando la prestación, la contraprestación o ambas constan de varios capitales.

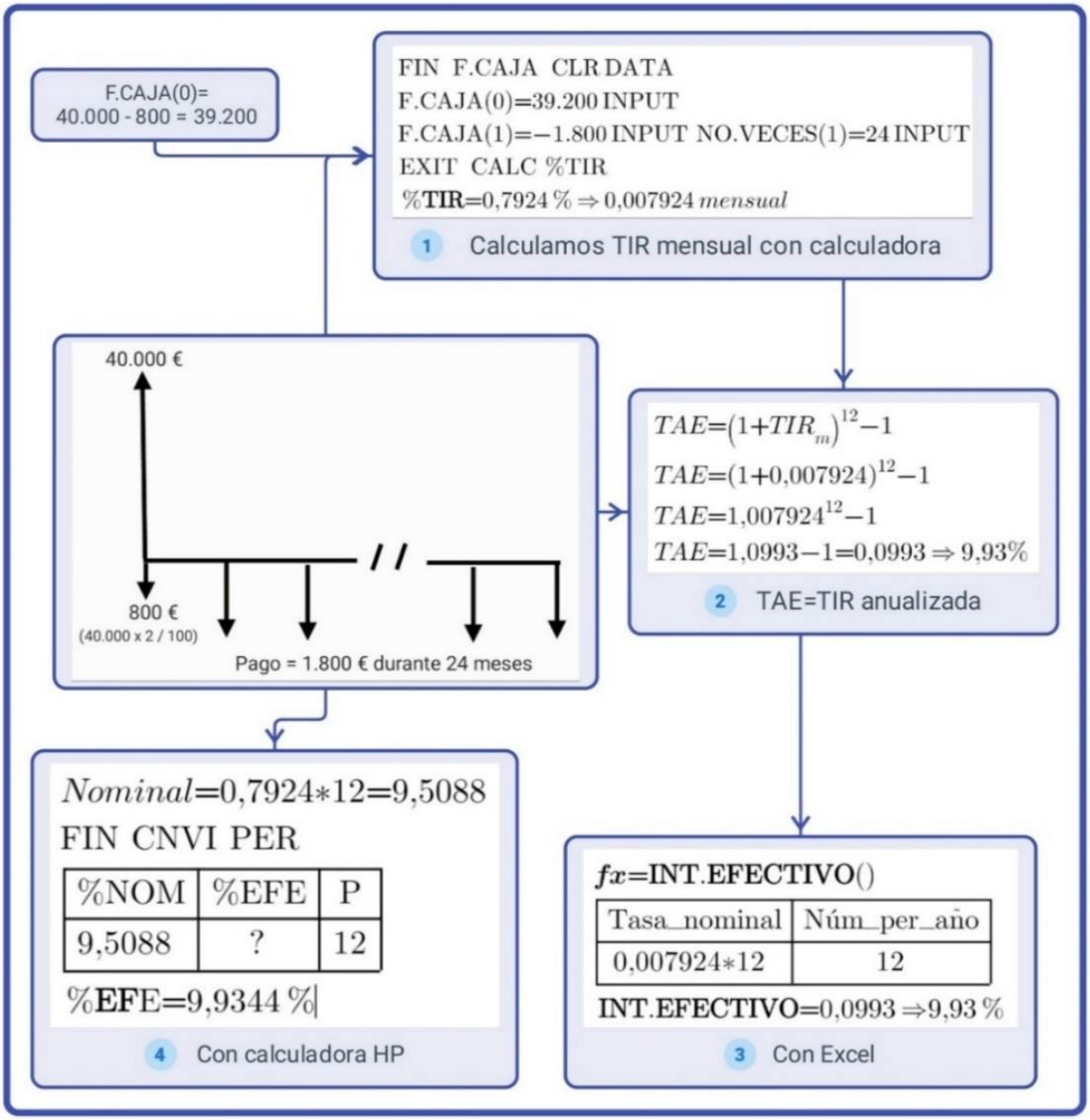
En este caso calculamos primero la TIR_m de la operación, normalmente con calculadora o con Excel. Dado que la TIR_m es igual al tipo de interés fraccionado del período de capitalización, calculamos la TAE mediante la anualización de la TIR, es decir, $TAE=(1+TIR_m)^m-1$.

Cuando el período de generación de la TIR es un año, la TAE es igual a la TIR. Si es superior a un año, la TAE es inferior a la TIR, y si es inferior a un año, el caso más habitual, la TAE es superior a la TIR.

Con las calculadoras financieras se puede calcular la TAE, convirtiendo, primero, la TIR_m en tipo de interés nominal (multiplicado la TIR_m por el número de períodos en que se ha fraccionado el año (m)) y a partir del nominal, con el menú de conversión de tasas, calcular la TAE.

76 Ejemplo de cálculo TAE

Calcula la TAE de un préstamo de 40.000 €, por el que nos comprometemos a pagar 24 cuotas de amortización-liquidación vencidas, de 1.800 € cada una, y además una comisión de apertura del 2 % al principio de la operación.



BLOQUE QUINTO – ALGUNAS APLICACIONES

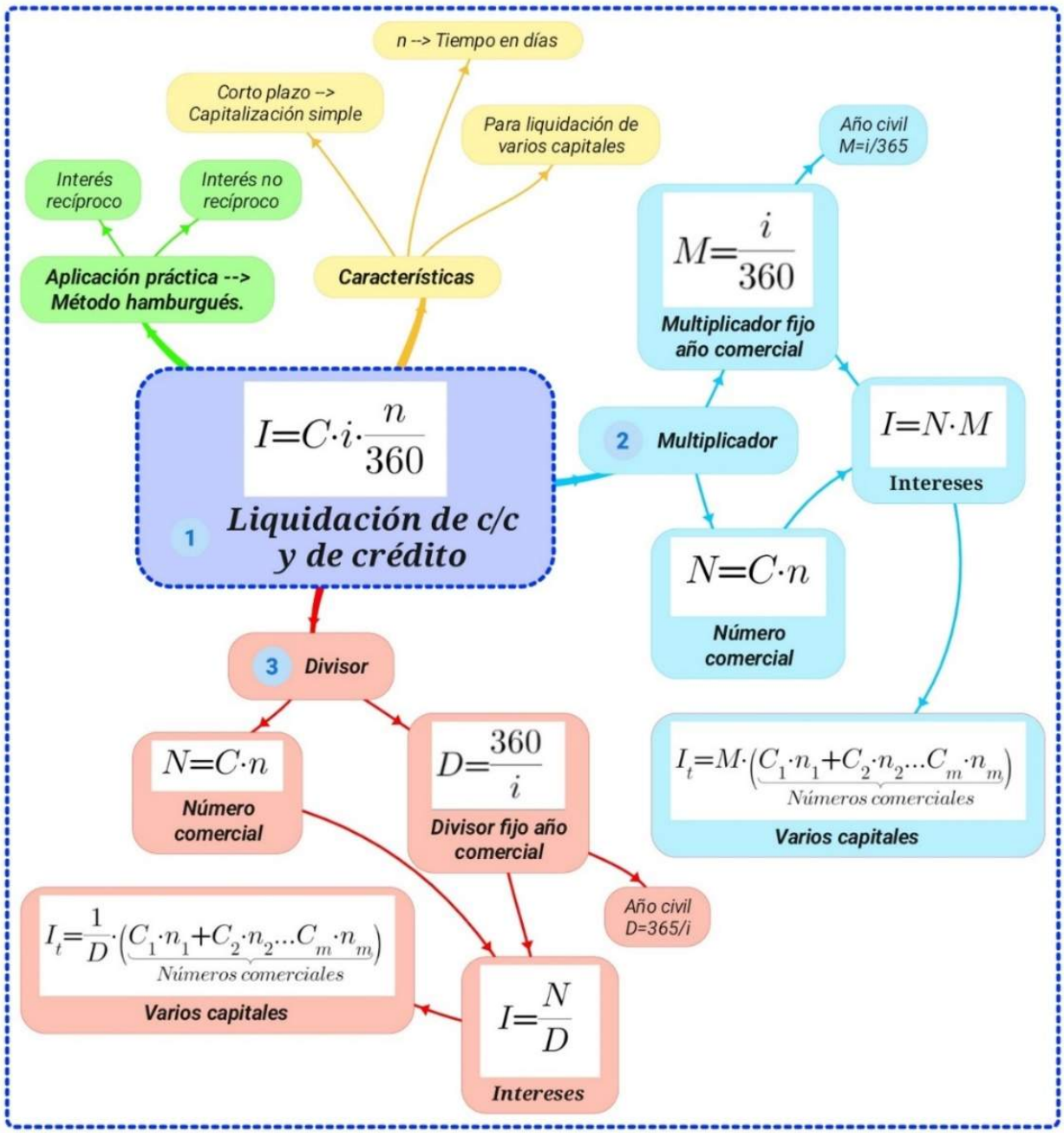
El conocimiento teórico es un tesoro cuya llave es la práctica.

THOMAS FULLER

No basta con alcanzar la sabiduría, es necesario saber utilizarla.

CICERÓN

77 Aplicación a c/c y de crédito



(1) **Fórmula**. Esta es la fórmula para calcular el interés con capitalización simple de una operación financiera. La aplicaremos a la liquidación de cuentas corrientes y de crédito, que aunque pueden tener una duración larga, se liquidan a corto plazo. Es la misma que hemos estudiado en el mapa número (22).

(2) **Multiplicador fijo**. El miembro derecho de la fórmula se puede dividir en dos partes. Una, que se llama multiplicador fijo $M=i/360$ y la otra, el número comercial $N=C*n$. A partir de estas dos expresiones el interés total es igual $I=M*N$.

La operación efectuada es simple, un solo capital, pero en la práctica se aplica a varios capitales (operaciones complejas).

Para varios capitales, el multiplicador M se mantiene igual que indicamos en el párrafo anterior y los números comerciales son la suma de los números de todos capitales calculados con la expresión $N=C_1*n_1+C_2*n_2\ldots C_m*n_m$. Luego los intereses totales son, $It=M*N$.

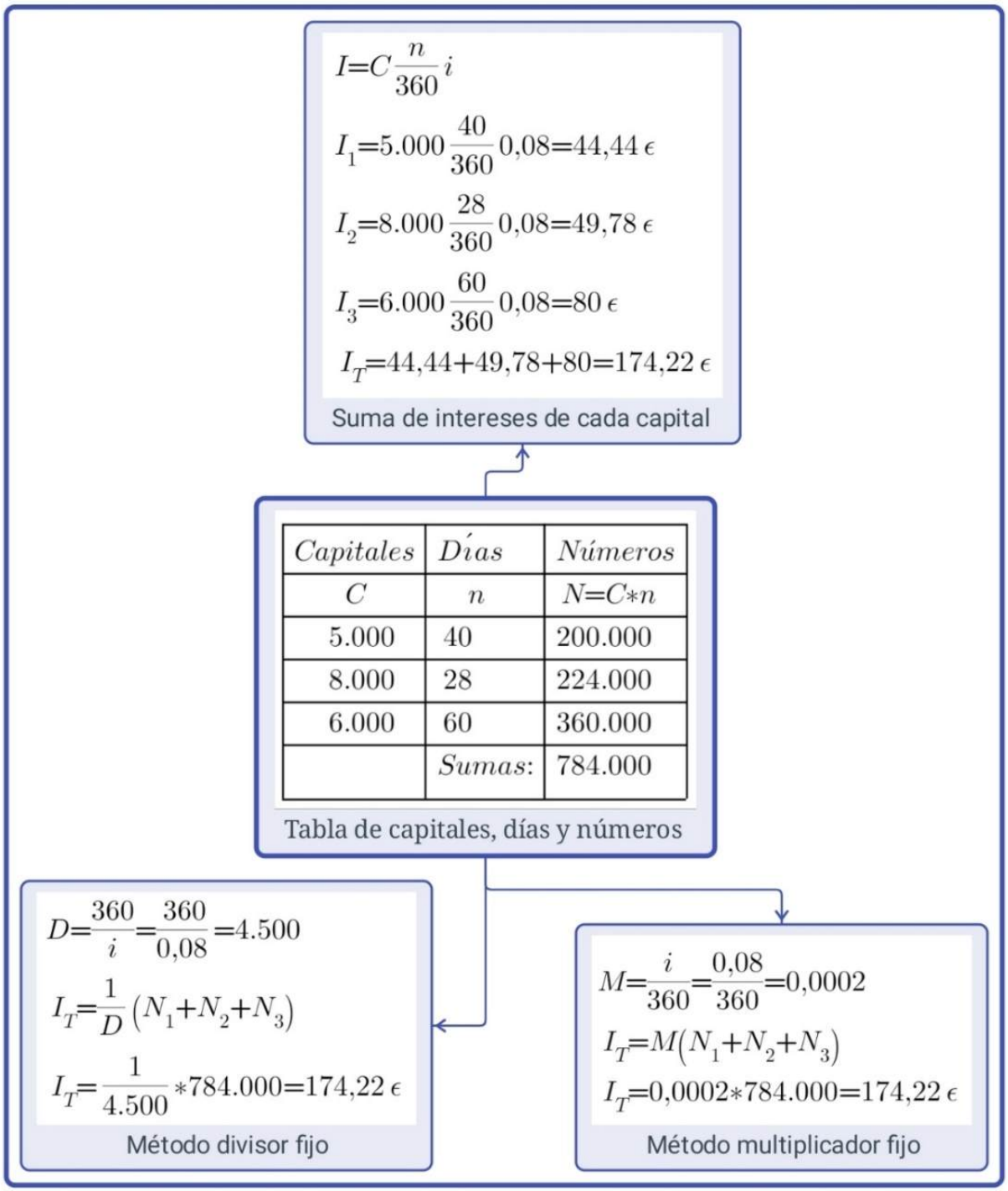
(3) **Divisor fijo.** Esta es otra forma de descomponer el miembro derecho de la ecuación (1). En este caso, en vez de un multiplicador, obtenemos un divisor fijo, $D=360/i$. El razonamiento para calcular los números es idéntico al caso anterior. Para calcular los intereses de varios capitales, realizamos la siguiente operación $I_t=1/D*N$.

Un método muy utilizado, en el que se aplica la técnica de números comerciales, es el método hamburgués, que veremos en el mapa siguiente. En su aplicación a c/c o de crédito, el tipo de interés puede ser recíproco (aplicando el mismo a los números deudores y acreedores) o no recíproco, cuando el tipo de interés es diferente en función de la naturaleza de los números.

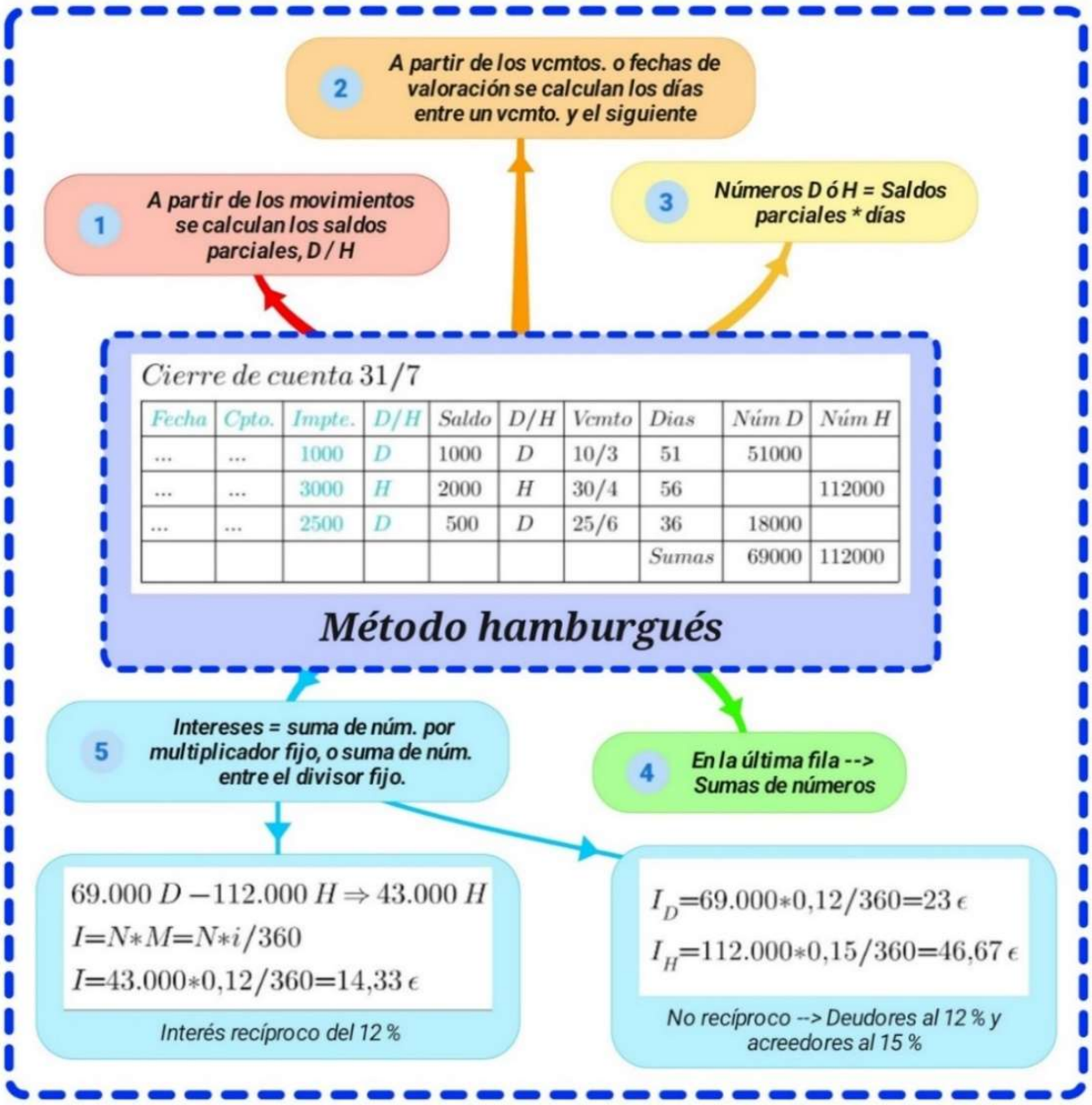
***

78 Ejemplo de liquidación c/c

Dados los siguientes saldos en c/c con sus respectivos días de permanencia: (5.000 €, 40 días), (8.000 €, 28 días), y (6.000 €, 60 días). Calcula el interés total al interés simple del 8 % anual.


$I=C\frac{n}{360}i$
$I_1=5.000\frac{40}{360}0{,}08=44{,}44\,\epsilon$
$I_2=8.000\frac{28}{360}0{,}08=49{,}78\,\epsilon$
$I_3=6.000\frac{60}{360}0{,}08=80\,\epsilon$
$I_T=44{,}44+49{,}78+80=174{,}22\,\epsilon$
Suma de intereses de cada capital
Capitales | Días | Números
C | n | N=C*n
5.000 | 40 | 200.000
8.000 | 28 | 224.000
6.000 | 60 | 360.000
Sumas: | 784.000
Tabla de capitales, días y números
$D=\frac{360}{i}=\frac{360}{0{,}08}=4.500$
$I_T=\frac{1}{D}\left(N_1+N_2+N_3\right)$
$I_T=\frac{1}{4.500}*784.000=174{,}22\,\epsilon$
Método divisor fijo
$M=\frac{i}{360}=\frac{0{,}08}{360}=0{,}0002$
$I_T=M\left(N_1+N_2+N_3\right)$
$I_T=0{,}0002*784.000=174{,}22\,\epsilon$
Método multiplicador fijo

79 Método hamburgués



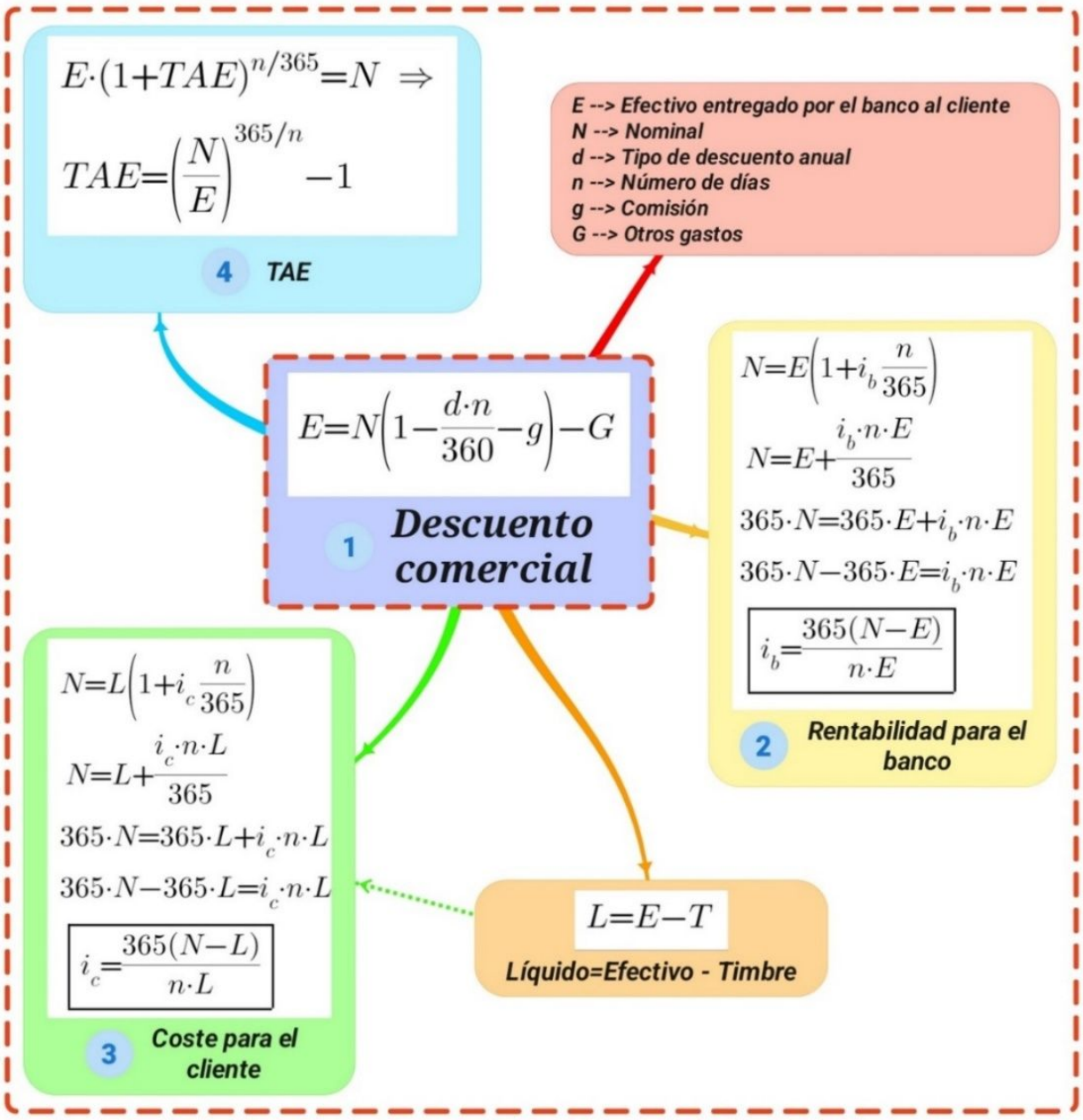
Este es el método hamburgués explicado con un ejemplo. Para ello debemos estudiar las ramas de forma ordenada que nos indicarán los pasos a seguir.

La ventaja de este método es que permite diferenciar entre números deudores y números acreedores para aplicar en situaciones de interés no recíproco. En el caso de interés recíproco, se compensan las sumas totales, resultando un saldo final de números,

a favor del deudor o del acreedor al que se le aplica el multiplicador o divisor fijo correspondiente.

***

80 Descuento comercial



(1) **Fórmula.** Esta es la fórmula de descuento comercial vista en el mapa (34), a la que hemos añadido las comisiones y otros gastos.

La inclusión de dichos conceptos supone una mejora en la rentabilidad para el banco y un incremento en los costes para el cliente, que calculamos a continuación.

(2) **Rentabilidad para el banco.** Una vez obtenido el efectivo (E), y dado que ya conocemos el nominal (N) y el tiempo (n), calcular la rentabilidad para el banco, se trata de despejar el tipo de interés racional de la operación. Partimos de la fórmula principal de capitalización simple, sustituimos los valores de las variables conocidas y despejamos el tipo de interés (i). El año se considera de 365 días.

(3) **Coste para el cliente.** En cuanto al coste para el cliente, sustituimos el efectivo (E), por L=E-T, porque hay un coste externo que no cobra el banco y es el timbre. La operativa es similar al caso anterior, sustituimos en la fórmula principal de capitalización simple los parámetros conocidos y despejamos el interés (i). También el año de 365 días.

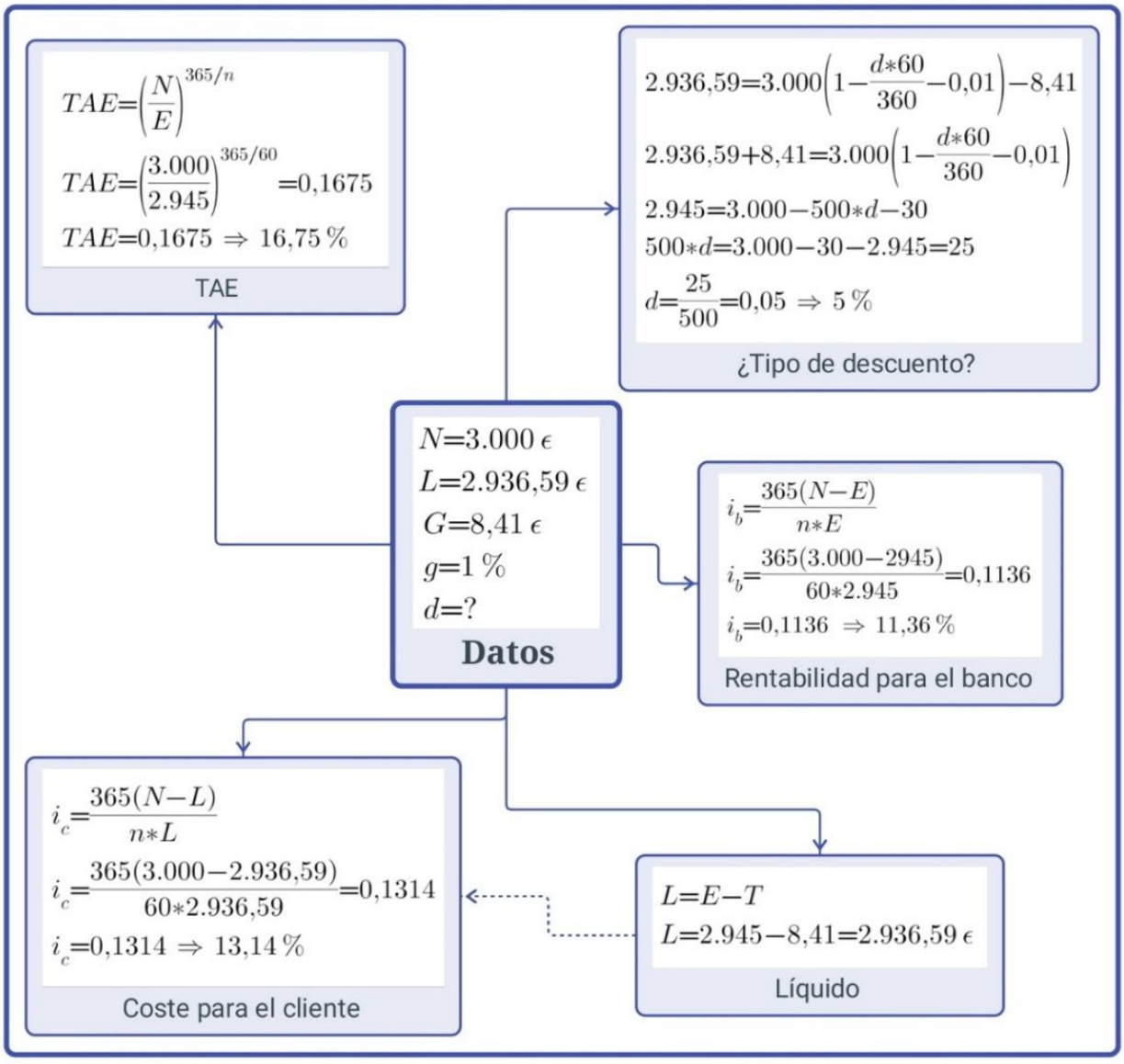
(4) **TAE**. Por último, calculamos la TAE, que en este caso representa el coste efectivo de la operación. Sustituimos las variables conocidas en la fórmula de capitalización compuesta, despejamos y calculamos la TAE. En este caso (E) equivale al capital inicial, TAE al tipo de interés anual, (N) al capital final y el tiempo n/365 es una fracción del año.

***

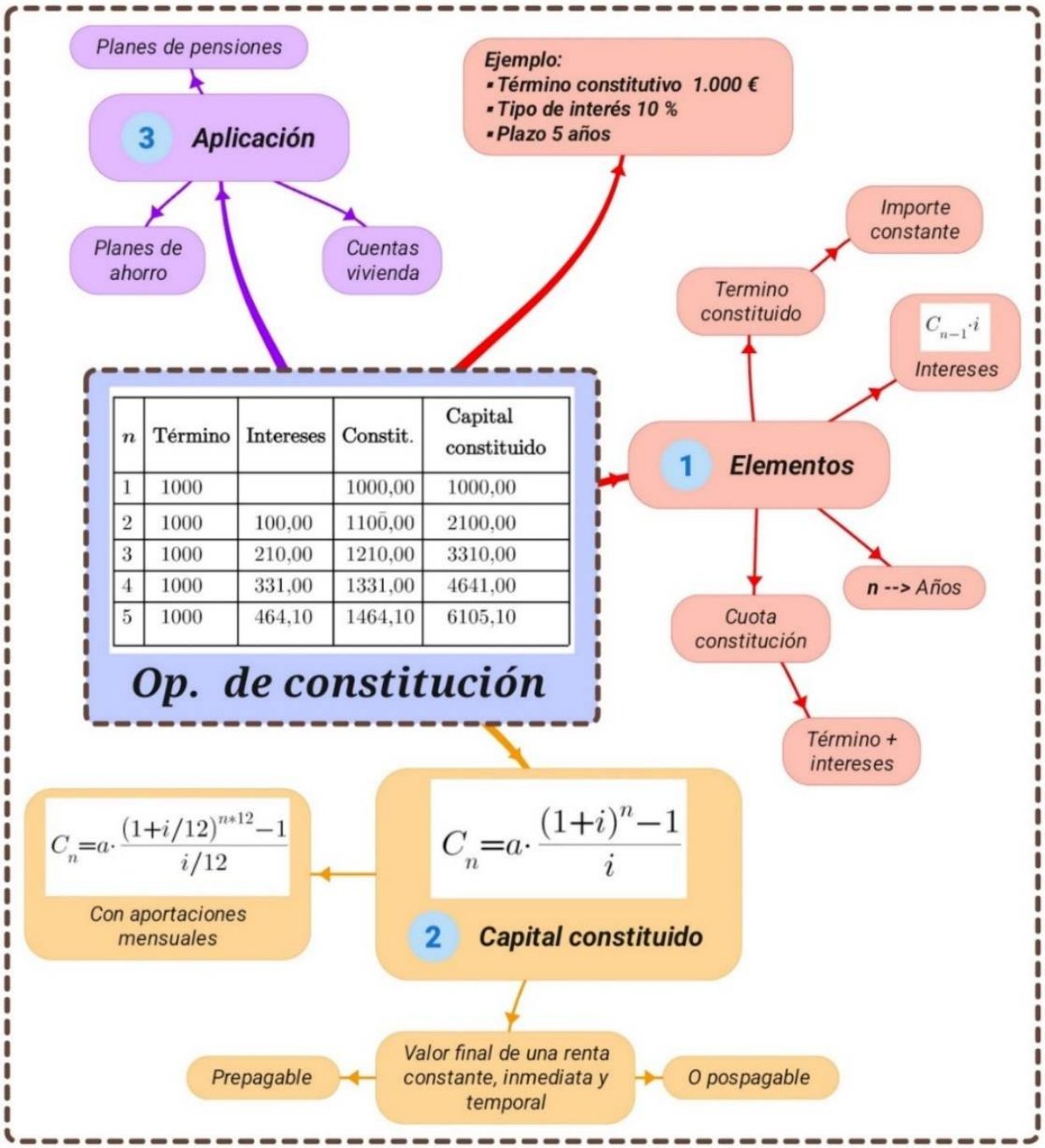
81 Ejemplo sobre descuento comercial

Se ha descontado un efecto de 3.000 €, resultando un abono líquido de 2.936.59 €. El timbre es de 8,41 € y la comisión de descuento es del 1 %.

Calcula el tipo de descuento, la rentabilidad para el banco, el coste para el cliente y la TAE.



82 Operaciones de constitución



Realizamos la explicación teórica mediante un ejemplo práctico.

(1) **Elementos.** Una operación de constitución consiste en una aportación periódica de un término constante durante un período de

tiempo determinado. Llamamos cuota constitución al término constitutivo más los intereses.

(2) **Capital constituido.** Es el valor final de una renta constante, temporal e inmediata. Puede ser prepagable cuando el término se entrega a principio del período o pospagable cuando se entrega al final. La fórmula es el VF de una renta con las características indicadas. La notación del término constante es (a).

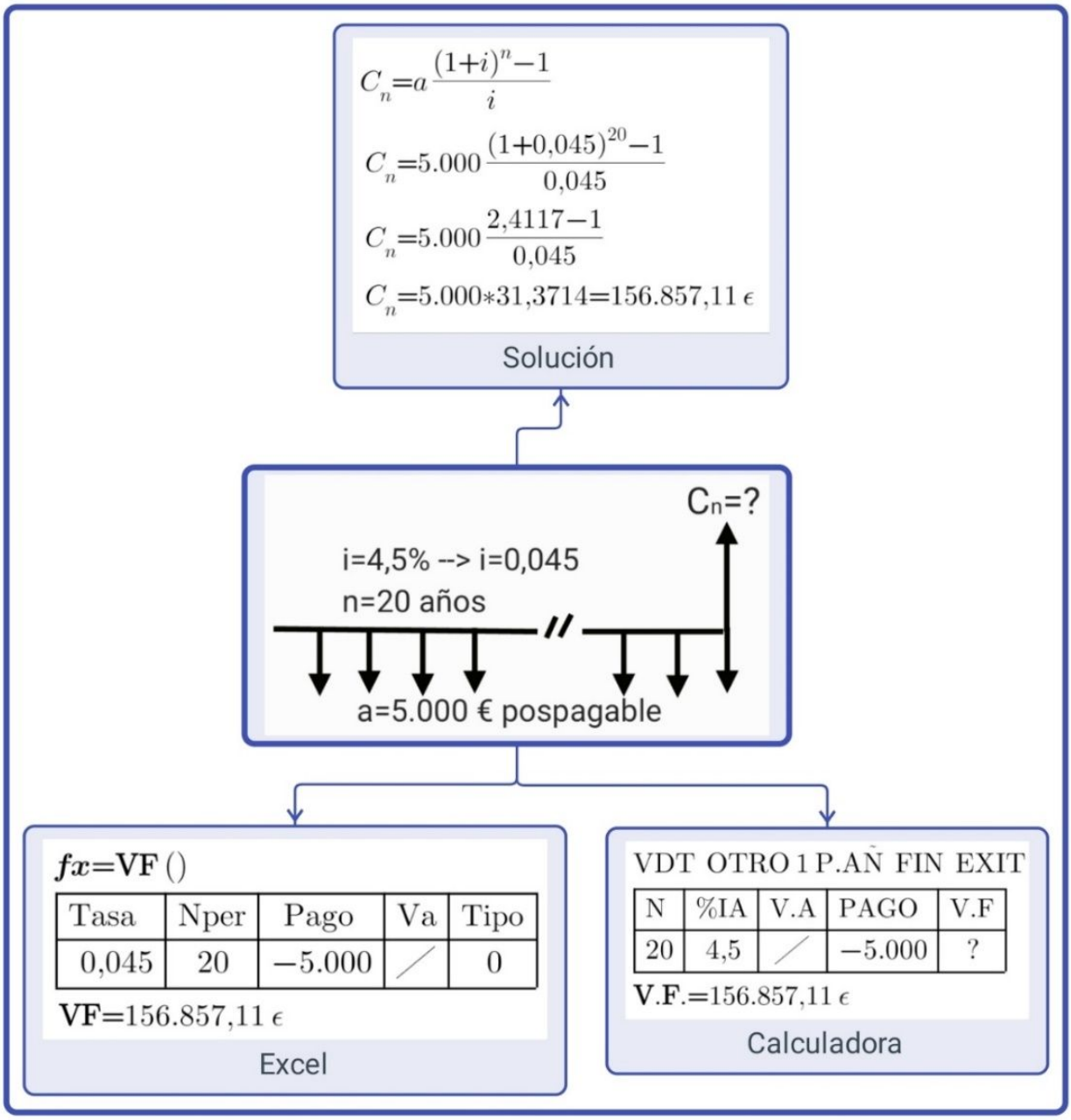
En el caso de que las aportaciones sean mensuales, algo muy habitual, el tipo de interés será i/12 y el número de períodos es n*12.

(3) **Aplicaciones.** Son ejemplos de operaciones de constitución, los planes de ahorro, los planes de pensiones y las cuentas vivienda.

***

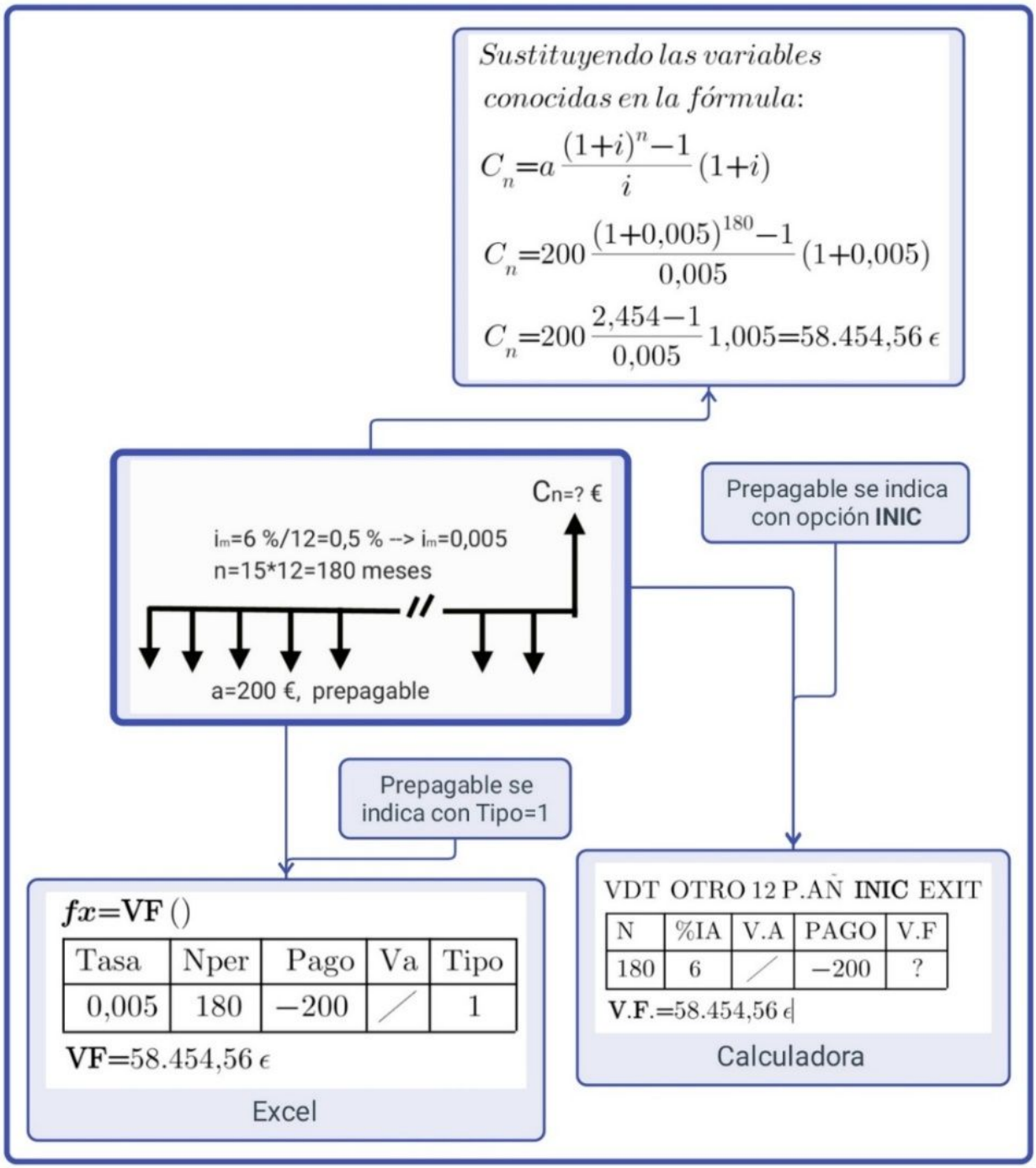
83 Ejemplos de operaciones de constitución

1.- Calcula el valor final estimado de un plan de pensiones, con una aportación de 5.000 € a final del año, durante veinte años, suponiendo una rentabilidad del 4,5 % anual.



2.- Hugo contrató un plan de ahorro con aportaciones de 200 € mensuales, el día 1 de cada mes, durante 15 años, al tipo de interés garantizado del 6 % nominal.

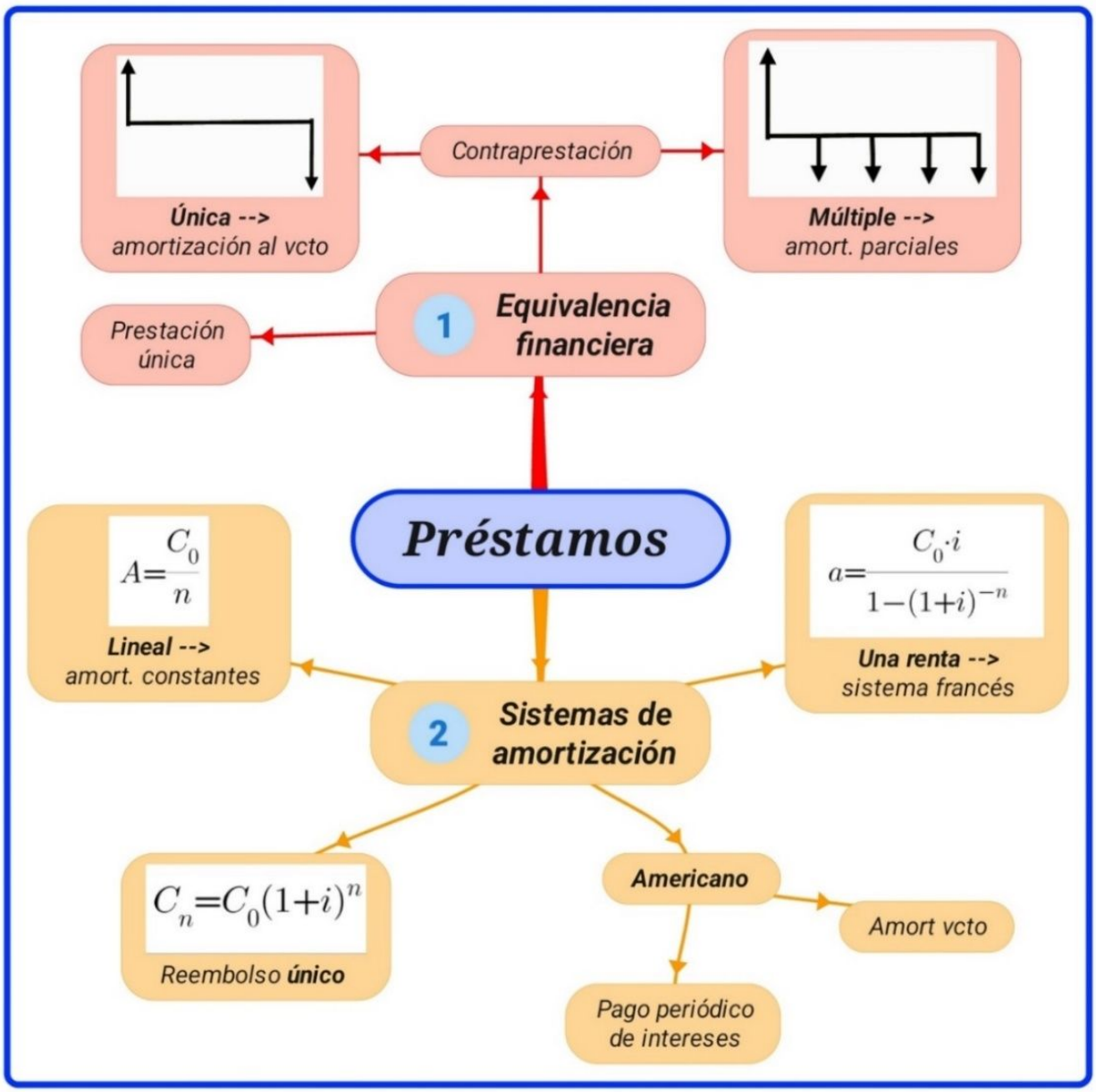
Calcula el saldo final del plan de ahorro.



En el planteamiento del problema, se indica el tipo de interés nominal. Dado que los períodos son mensuales, como paso previo es necesario calcular el interés fraccionado $i_m = 0{,}06/12 = 0{,}005$.

***

84 Préstamos



Este es un esquema general sobre préstamos, que muestra la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, y su clasificación según el sistema de amortización.

(1) **Equivalencia financiera.** Una característica habitual en los préstamos es que la prestación suele ser única. Es decir, una sola vez un capital. Sin embargo, la contraprestación, que es la devolución del

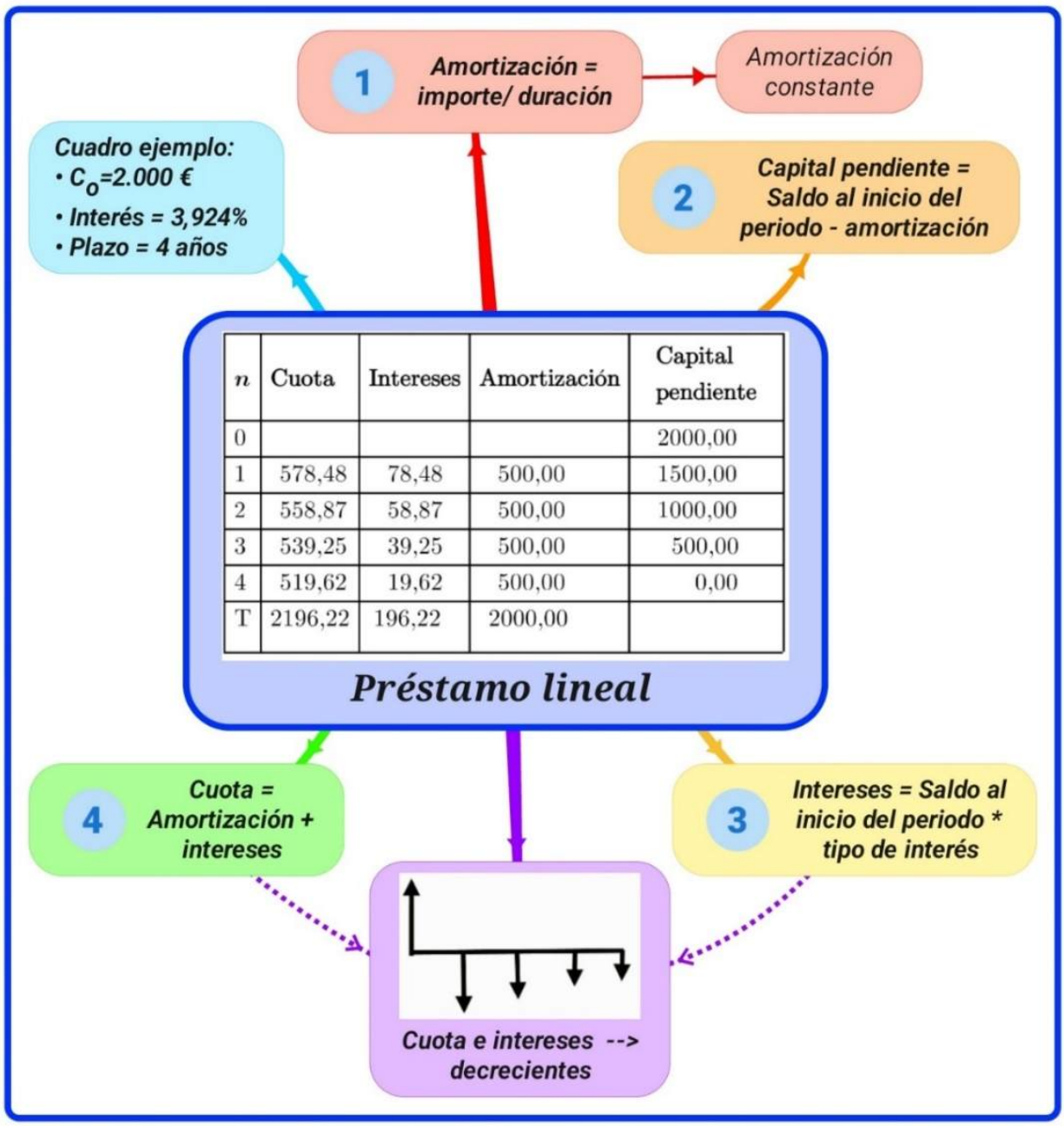
préstamo, puede ser única o múltiple. En ambos casos, como en toda operación financiera, hay que buscar la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación.

(2) **Sistema de amortización.** Esta es la clasificación de los préstamos atendiendo al sistema de amortización:

- ✓ Por una parte, tenemos el préstamo sistema francés, donde la amortización es una cuota constante que incluye intereses más amortización. Esta cuota constituye el pago de una renta como contraprestación por el préstamo recibido. Se calcula despejando el término constante (C) en la fórmula principal de la renta modelo que hemos visto en el mapa número (54). Ahora, en este mapa, cambiamos la notación del término (C) por (a), por ser el más usado en manuales.
- ✓ Otra modalidad es el préstamo americano, por el que se pagan los intereses de forma periódica y se amortiza el principal al vencimiento.
- ✓ El préstamo lineal es el que tiene periódicamente amortizaciones constantes iguales al importe total entre el número de períodos de amortización.
- ✓ Y el préstamo de reembolso único, por el que se paga el principal más intereses a su vencimiento. Su fórmula es el cálculo del montante en capitalización compuesta.

***

85 Préstamo lineal



Realizamos la explicación teórica mediante un ejemplo, mostrando los resultados obtenidos sobre un cuadro de amortización.

(1) **Cuantía amortización.** La amortización es periódica y constante, igual al importe principal entre el número de períodos que

dura el préstamo.

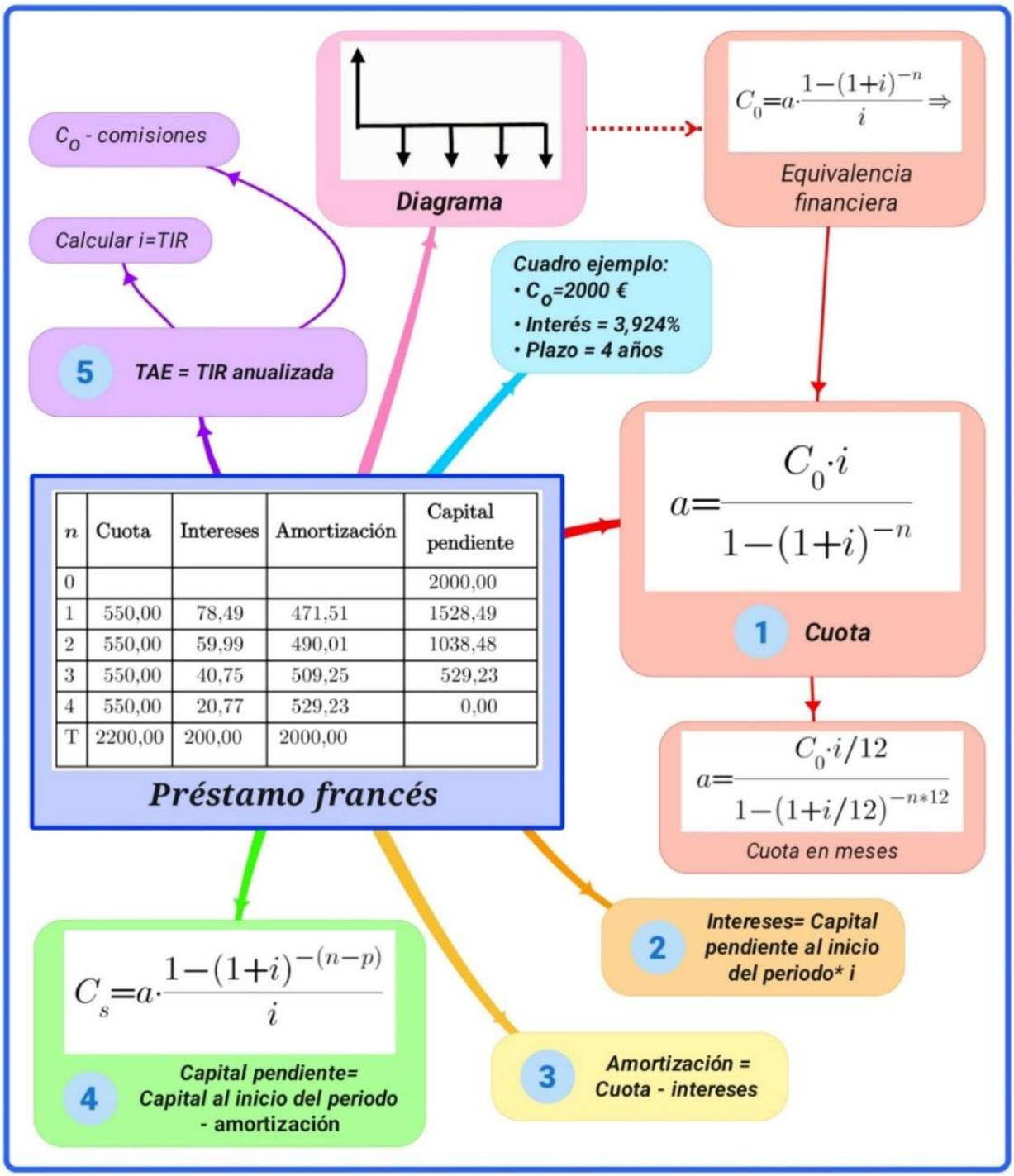
(2) **Saldo pendiente.** El saldo es el del inicio del período menos la amortización del período.

(3) **Intereses.** Los intereses se calculan aplicando sobre el saldo al inicio de cada período el tipo de interés. Dado que el saldo disminuye conforme se van realizando amortizaciones, el interés de los períodos siguientes también disminuye.

(4) **Cuota.** Entonces, el importe a pagar en cada período es la amortización más los intereses. En el diagrama de flujos de caja se puede ver cómo el tamaño de las fechas hacia abajo también van disminuyendo.

***

86 Préstamo francés



n	Cuota	Intereses	Amortización	Capital pendiente
0				2000,00
1	550,00	78,49	471,51	1528,49
2	550,00	59,99	490,01	1038,48
3	550,00	40,75	509,25	529,23
4	550,00	20,77	529,23	0,00
T	2200,00	200,00	2000,00	

También nos apoyamos en un ejemplo y en un cuadro de amortización para la explicación teórica.

(1) **Fórmula.** Ya hablamos de que el préstamo francés se amortiza mediante el pago de una renta. Esta se calcula despejando el término (a) en la fórmula del (VA) de una renta constante.

En el caso de que el préstamo tenga una periodicidad de amortización distinta del año, por ejemplo, mensual, hay que transformar el tipo de interés nominal en (i/12) e incluir el número de períodos (n*12).

(2) **Intereses.** Para seguir elaborando el cuadro, con objeto de calcular los intereses del período, aplicamos el tipo de interés al saldo al inicio del período.

(3) **Amortización**. El importe que se amortiza en cada período es igual al importe de la cuota (a) , menos los intereses calculados en el paso anterior.

(4) **Capital pendiente**. El saldo al final de cada período será el capital al inicio menos la amortización. También podemos calcularlo como el valor actual C_s de los pagos pendientes hasta su vencimiento.

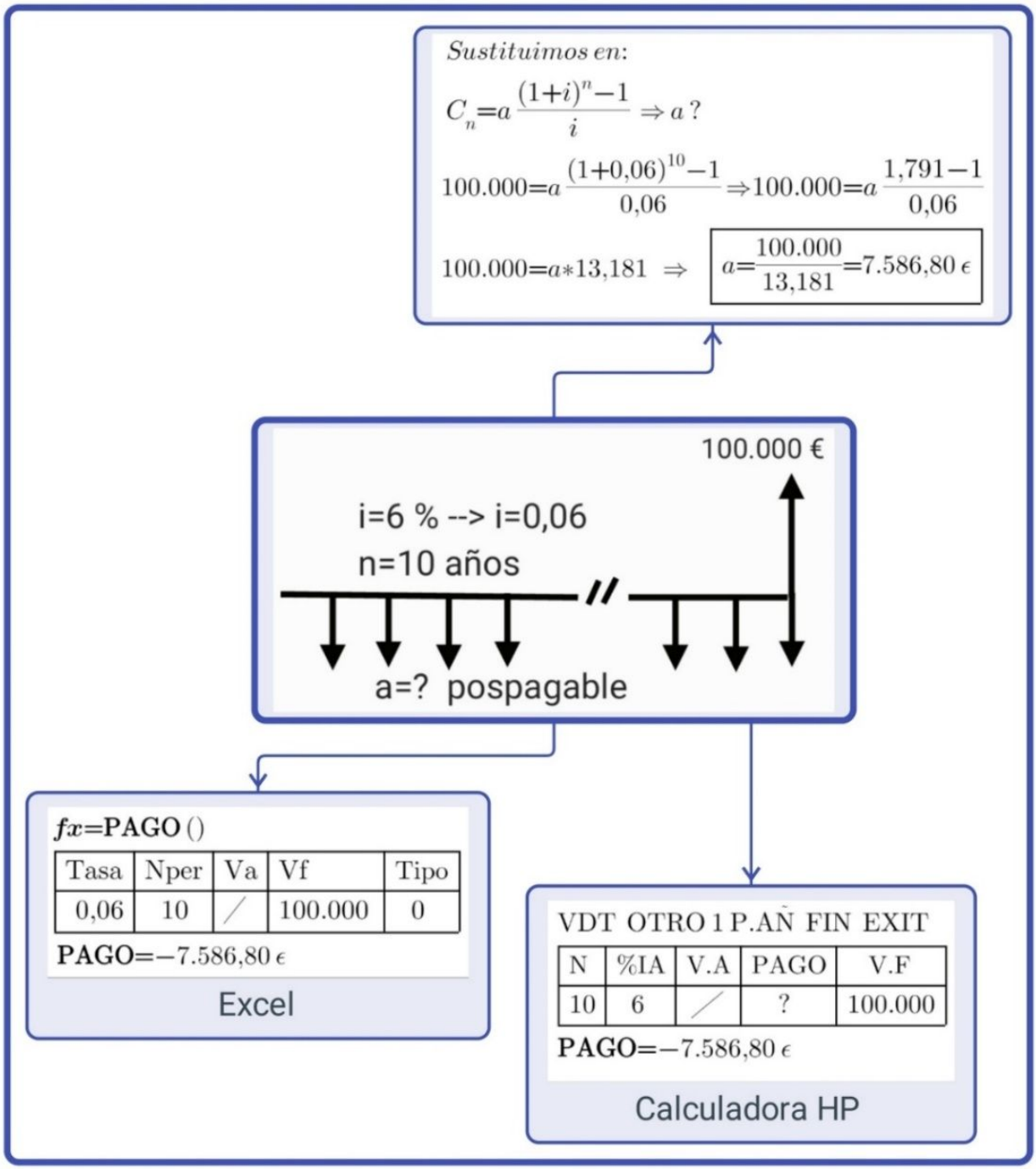
(5) **TAE.** Para calcular la TAE se obtiene primero la TIR y a partir de esta la TAE. Lo veremos mediante un ejemplo.

La modalidad de préstamo sistema francés es una de las que más se utiliza en la práctica bancaria, tanto para préstamos hipotecarios como personales.

***

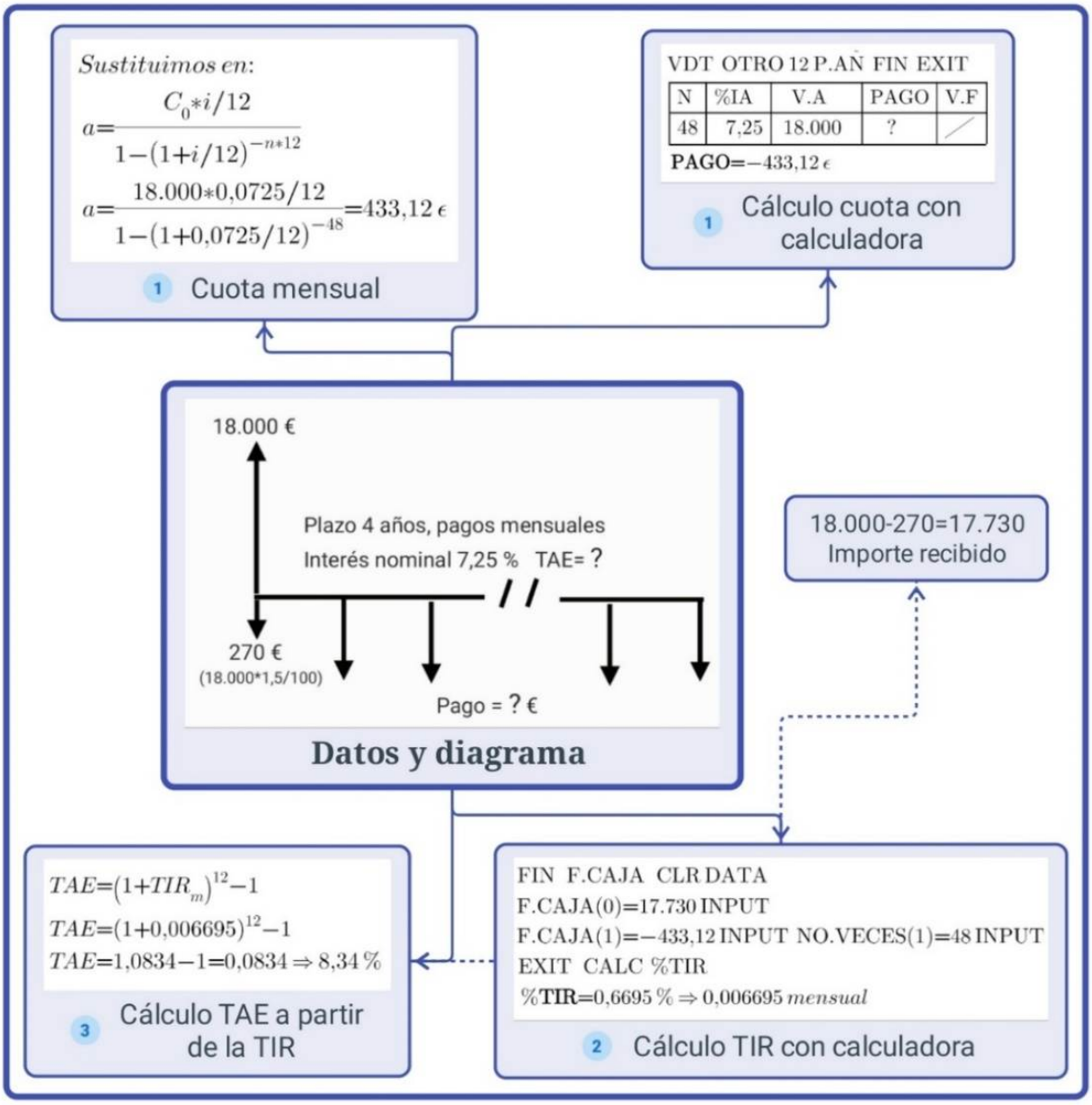
87 Ejemplos sobre préstamo francés

1.- Calcula la cuota anual de amortización-liquidación de un préstamo estilo francés, pospagable, de 100.000 € de principal, plazo de 10 años y al tipo de interés del 6 %.



2.- Calcula la cuota mensual pospagable de un préstamo de 18.000 €, durante 4 años, al 7,25 % de interés nominal y una comisión de apertura pagada al inicio de la operación del 1,5 % sobre el importe del préstamo.

¿Cuál es la TAE de la operación?

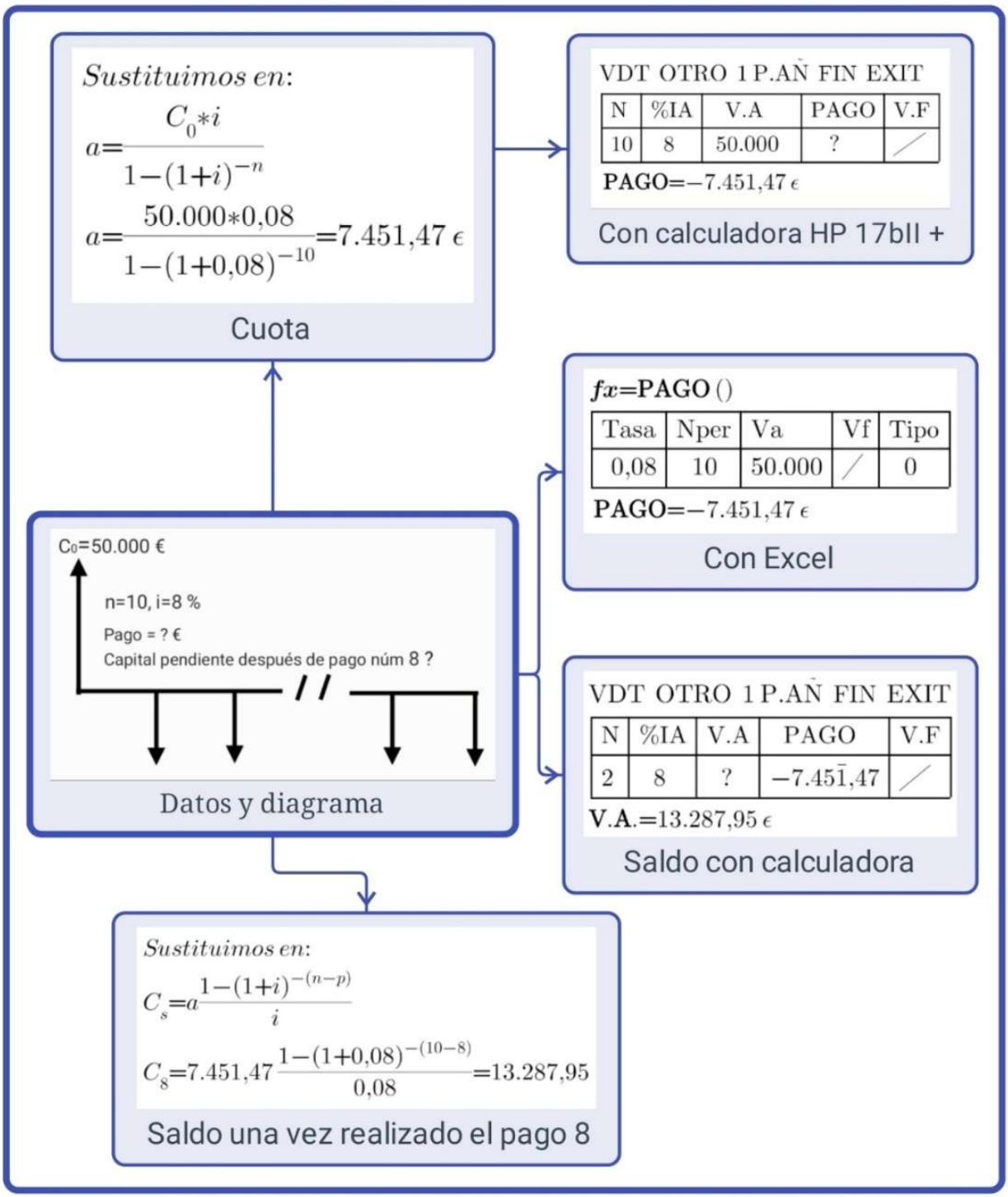


Primero calculamos la cuota mensual y luego para obtener la TAE, calculamos la TIR con la calculadora, y a continuación obtenemos la TAE con la fórmula estudiada en el mapa (75).

3.- Dado un préstamo de $50.000\,€$, a plazo de 10 años al $8\,\%$.

¿Cuál es importe de la cuota anual vencida por el sistema francés?

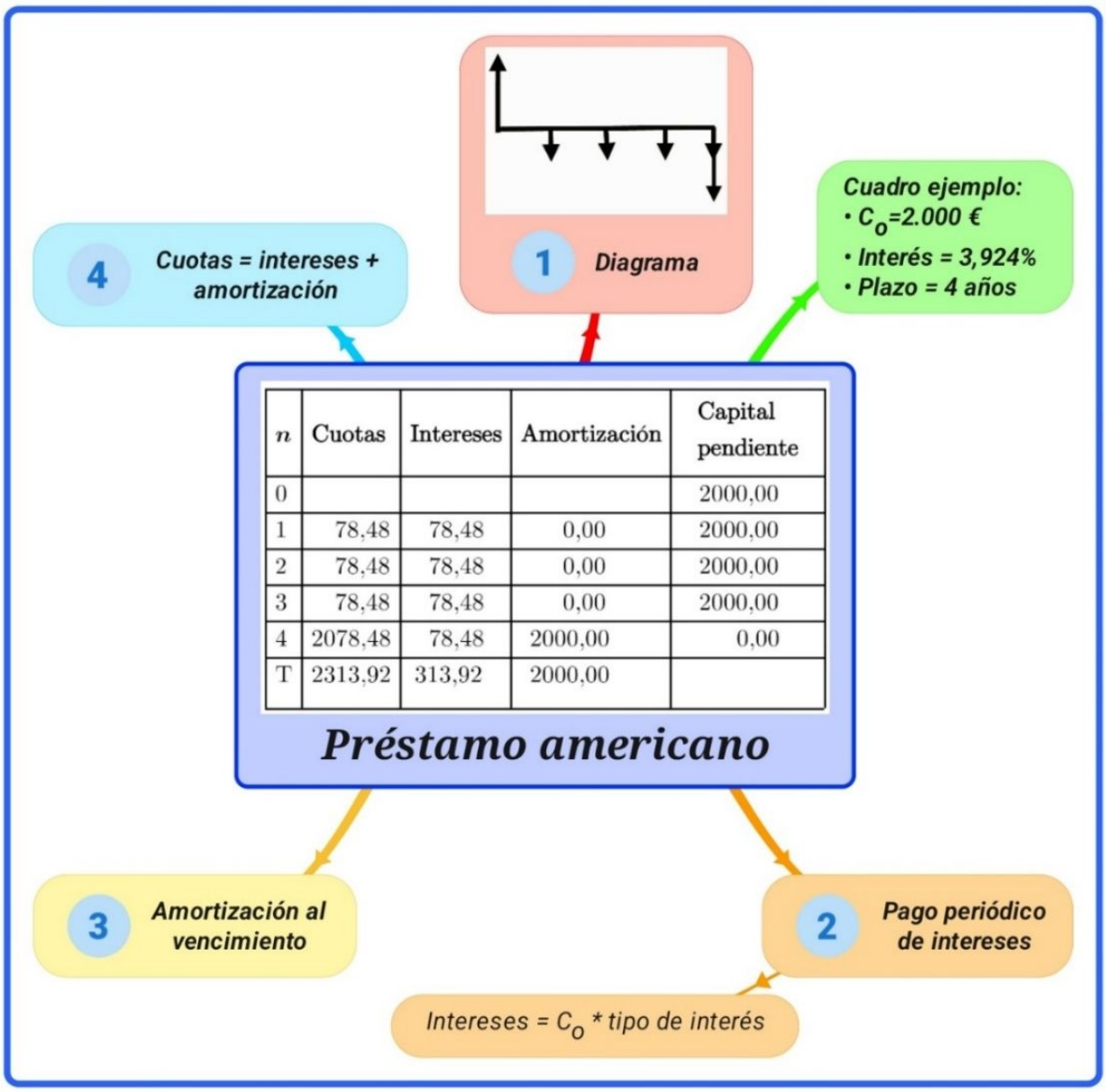
¿Cuál será el capital pendiente después del pago número 8?



El saldo después del pago número ocho se calcula como el valor actual (V.A.) de las dos últimas cuotas pendientes de pago.

***

88 Préstamo americano



n	Cuotas	Intereses	Amortización	Capital pendiente
0				2000,00
1	78,48	78,48	0,00	2000,00
2	78,48	78,48	0,00	2000,00
3	78,48	78,48	0,00	2000,00
4	2078,48	78,48	2000,00	0,00
T	2313,92	313,92	2000,00	

Consideramos en el ejemplo un supuesto de periodicidad anual.

(1) **Diagrama.** Representa los datos del cuadro y se aprecia que en cada período solo se pagan los intereses, y la amortización se realiza a su vencimiento.

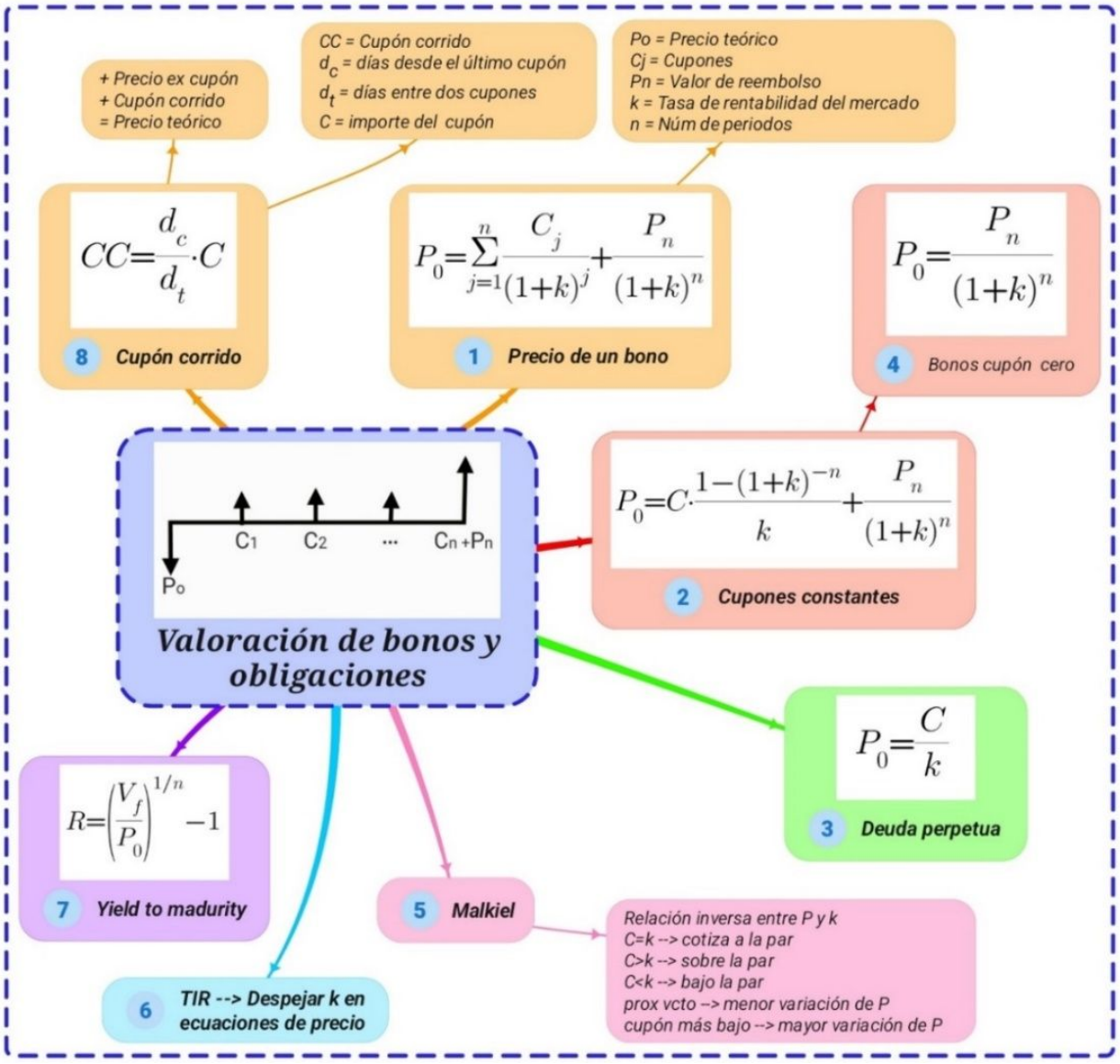
(2) **Intereses.** Los intereses de cada período son el importe del capital inicial por el tipo de interés, dado que no hay amortizaciones intermedias.

(3) **Amortización.** El último pago es importe del préstamo más los intereses del último año.

***

89 Valoración de renta fija

Llamamos renta fija a los activos financieros cuando conocemos sus rendimientos y flujos de caja de antemano, a diferencia de la renta variable, cuyos rendimientos suelen ser más inciertos en el momento que realiza la inversión.



Cuando un inversor adquiere un bono o una obligación, se convierte en prestamista de la empresa o ente público que lo ha

emitido y tiene derecho a percibir los intereses denominados cupones, normalmente anuales o semestrales.

Además, los bonos y obligaciones cotizan en los mercados financieros, por lo que el inversor puede recuperar su dinero antes de su vencimiento al precio que cotiza en el mercado.

Entonces, los rendimientos de la renta fija provienen de su cupón o interés periódico, de las ganancias de capital, en el supuesto de que se vendan antes del vencimiento y de la reinversión de los cupones.

La renta fija no está exenta de riesgos, como son: de insolvencia, de tipos de interés, de liquidez, de inflación, y de tipos de cambio.

Podemos distinguir tres tipos de bonos:

- ✓ Los que pagan periódicamente un cupón y se amortizan al vencimiento.
- ✓ Bonos cupón cero, los cuales no pagan cupón periódico y el inversor recibe al vencimiento un cobro con el interés o rendimientos implícitos.
- ✓ La deuda perpetua, que paga periódicamente un cupón y no se amortiza nunca.

Este mapa trata sobre la valoración de los tres tipos de bonos y sus fórmulas respectivas.

(1) **Precio.** El precio de un bono P_0, negociado en el mercado secundario, es el valor actual de todos los flujos de caja esperados hasta su vencimiento, descontado a un tipo de interés (k), mínimo exigido por el inversor, (que incluye también la prima de riesgo de la inversión) o bien la rentabilidad del mercado si es superior.

El segundo miembro de esta ecuación tiene dos términos. El primer término representa el valor actual de los cupones C_j. Los cuales son conocidos y vienen indicados en porcentaje con periodicidad anual o semestral, normalmente. El segundo término es el valor actual del nominal del bono P_n. El precio teórico es la suma de los dos valores actuales indicados. Veremos la aplicación práctica en los ejemplos.

El precio real es el que cotiza en el mercado, y decimos que un bono está infravalorado si el valor en el mercado es inferior al teórico,

recomendando su compra. En el caso contrario, cuando el valor en el mercado es superior al teórico, el bono está sobrevalorado.

(2) **Precio con cupones constantes.** En muchos bonos, ocurre que los cupones son constantes. Por ello podemos sustituir el sumatorio de la fórmula anterior por la fórmula del valor actual de una renta descontada al tipo de interés (k) y que dura (n) períodos. El segundo término de la derecha de la ecuación no varía respecto a la fórmula (1).

(3) **Precio deuda perpetua**. Esta es la valoración de la renta fija perpetua, sin vencimiento. En este caso, el precio teórico es el valor actual de todos los cupones, como hemos visto en los capítulos anteriores sobre rentas perpetuas. P_0=C/k.

(4) **Bonos cupón cero.** También existe renta fija que no tiene cupones. Es la denominada cupón cero. En este caso el precio del bono se calcula utilizando solo el segundo término del segundo miembro de la ecuación (1) y (2).

(5) **Malkiel**. ¿Qué factores influyen en el precio de los bonos?

Los principios de Malkiel, explican que el precio teórico depende de la relación entre el cupón y la rentabilidad del mercado y dicen:

- ✓ Cuando (C) y (k) son iguales, el bono cotiza a la par.
- ✓ Si (C) > (k), cotizará sobre la par, y
- ✓ Si (C) < (k), cotizará bajo la par.

(6) **TIR.** El cálculo de la TIR consiste en despejar la (k) en la ecuación (1). Y es la forma más habitual de medir la rentabilidad de un bono.

Dado que el número de términos de la ecuación suele ser elevado, es mejor utilizar la calculadora financiera. En el mapa (90.3) se muestra un ejemplo de uso de la calculadora.

(7) **Yield to maturity (YTM).** Es la rentabilidad efectiva que obtiene el inversor. Si observamos la fórmula, vemos que es la misma que la TRE, expuesta en el mapa (69).

También en el mapa (90.3) hay un ejemplo de su cálculo.

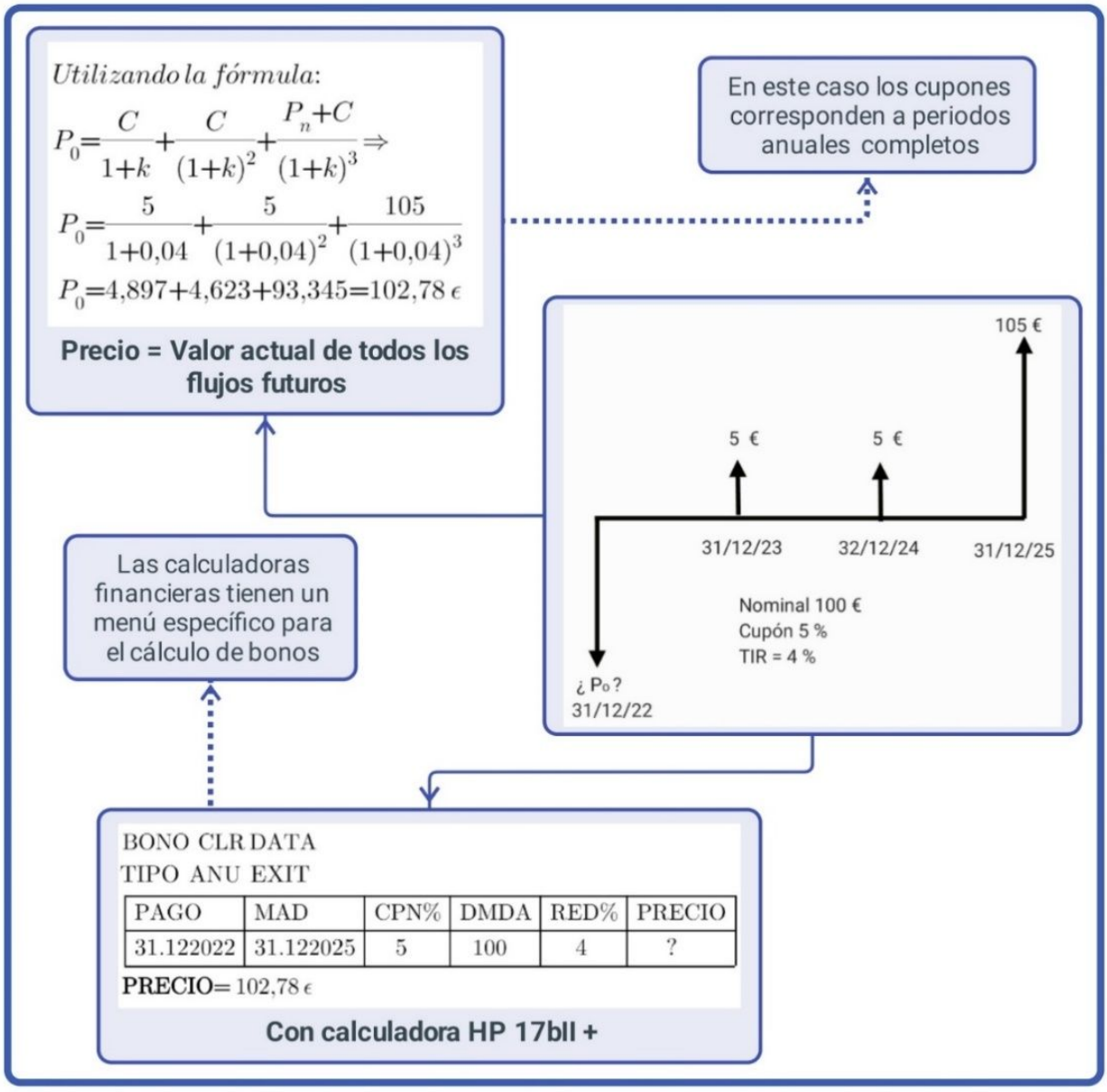
(8) **Cupón corrido**. El cupón corrido o devengado es la cuantía de la parte proporcional del cupón desde el día del último pago hasta la fecha. Desarrollamos un ejemplo en (90.2).

El precio ex-cupón es precio teórico que hemos visto menos el cupón corrido. La calculadora financiera en la variable PRECIO nos da el precio ex-cupón y en ACUM el cupón corrido.

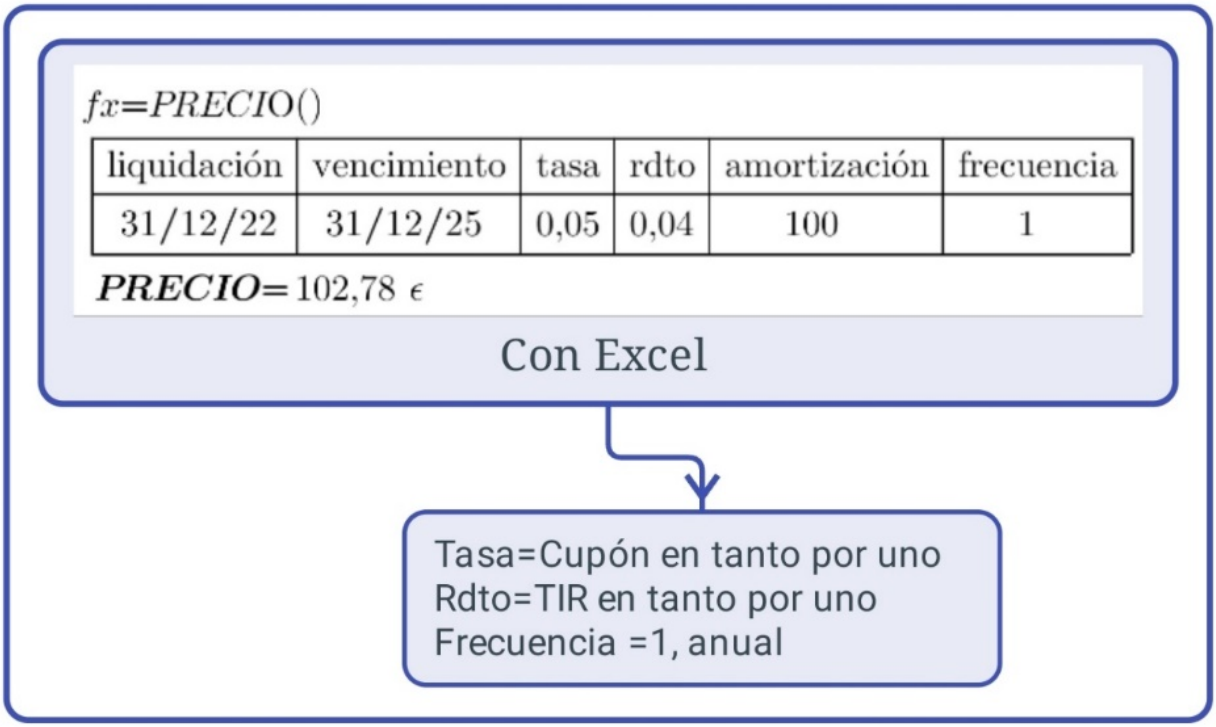
***

90 Ejemplos sobre valoración de renta fija

1.- ¿Cuál es el precio teórico de un bono en el mercado secundario, a fecha 31/12/2022, que acaba de pagar el cupón, vence el 31/12/2025, tiene un cupón anual del 5 %, su nominal es de 100 € y la TIR del mercado a dicha fecha es del 4 %?



Cálculo del precio teórico del bono en el supuesto anterior, con Excel:

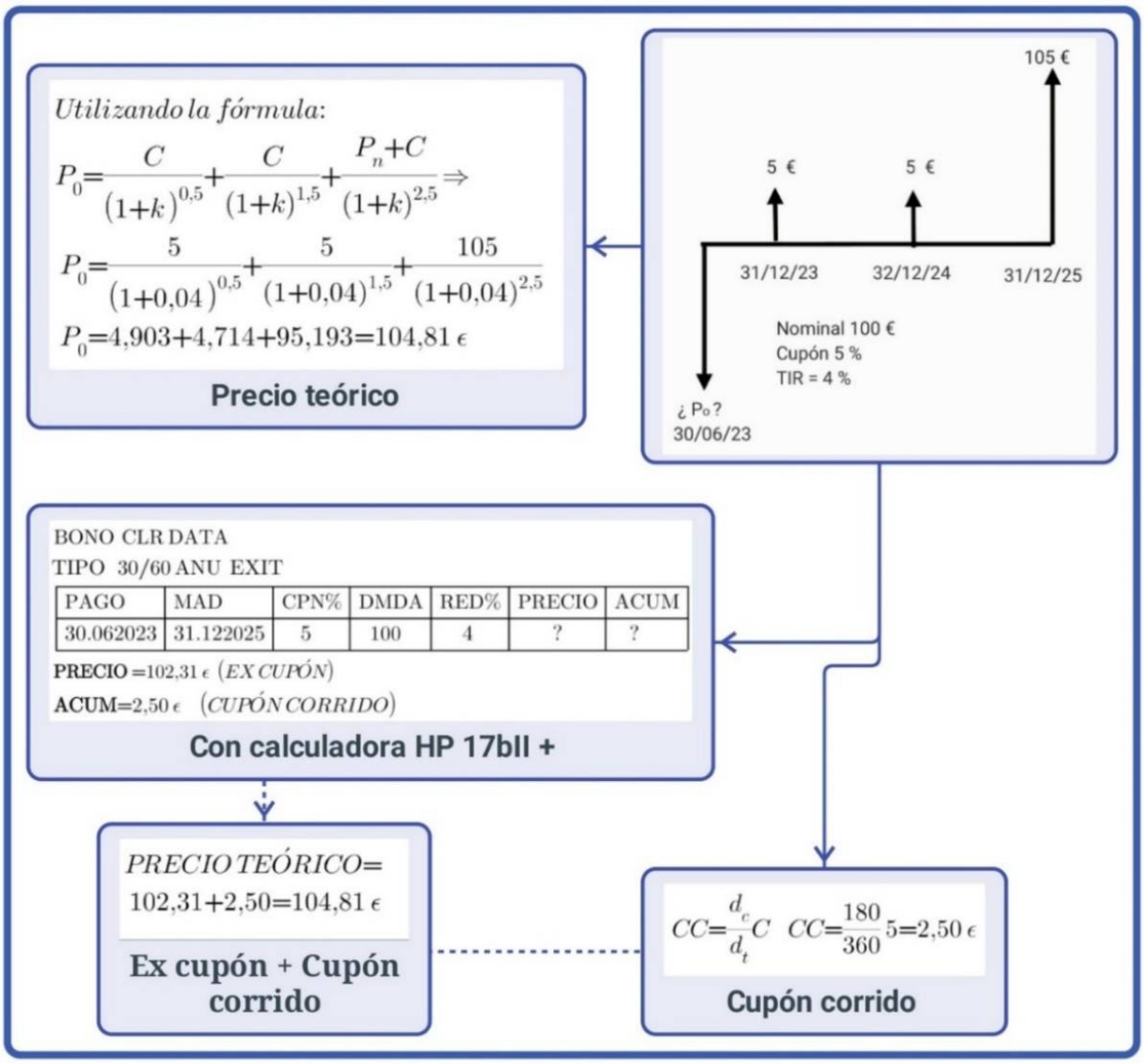


Excel tiene una función para calcular el precio de los bonos, PRECIO(). La diferencia con la calculadora es que la tasa y el rendimiento se introducen en tanto por uno, excepto que esté la celda de entrada en formato porcentaje, en ese caso se introduciría en tanto por ciento.

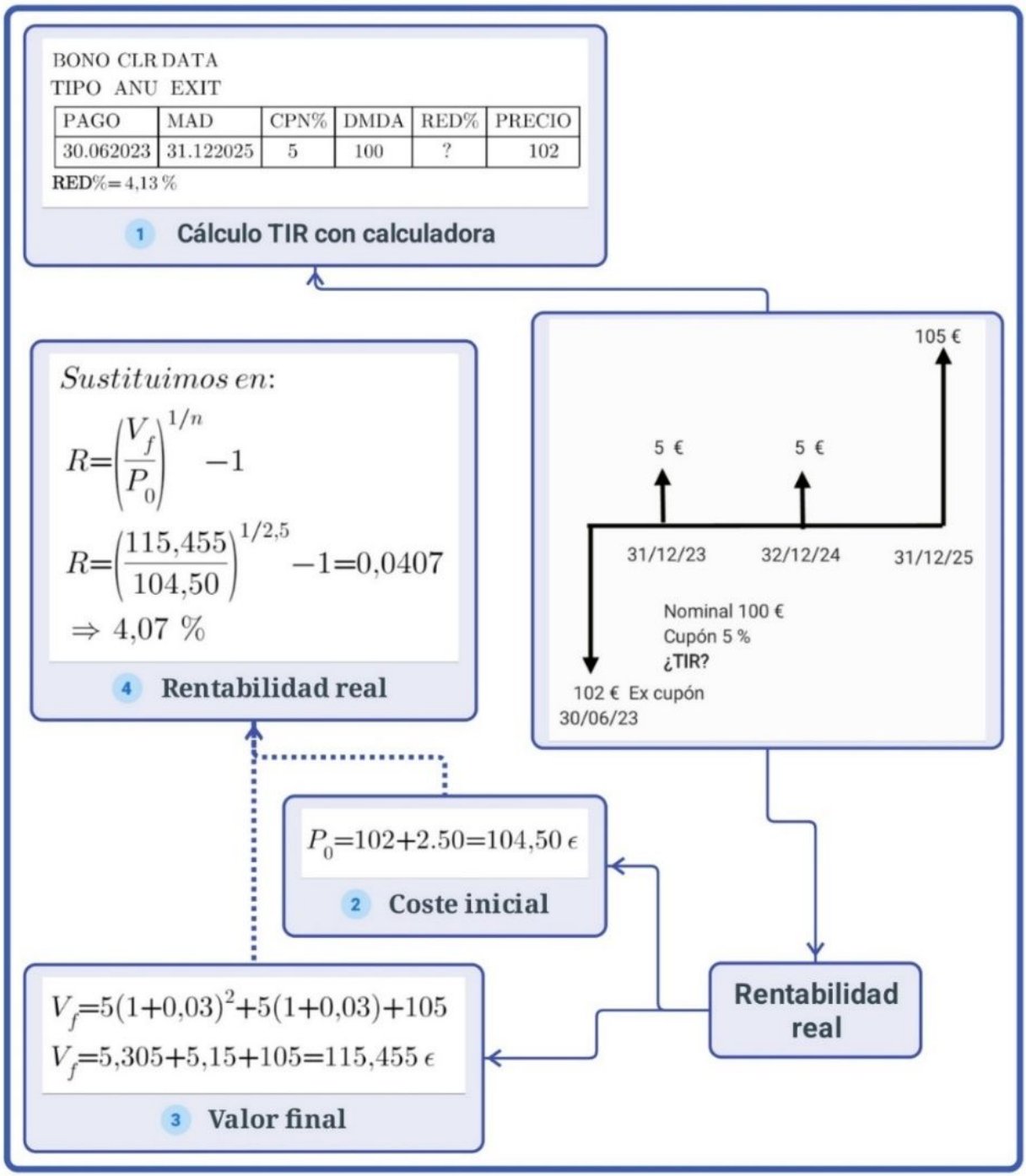
La función PRECIO() de Excel calcula el precio ex cupón, igual que la calculadora. Para conocer el precio teórico tenemos que sumarle importe del cupón corrido. En este caso, al ser periodos anuales enteros, el importe del cupón vencido es cero.

2.- Supongamos el mismo bono del caso anterior al 30/06/2023, con la misma TIR de mercado. Calcula el precio teórico entero, precio ex cupón y el cupón corrido.

El motivo de continuar los ejemplos con el mismo bono es porque estas situaciones son habituales en la vida real. El inversor que realiza una inversión en un bono determinado tiene que efectuar valoraciones frecuentemente con el objetivo de lograr una gestión eficiente de su cartera.

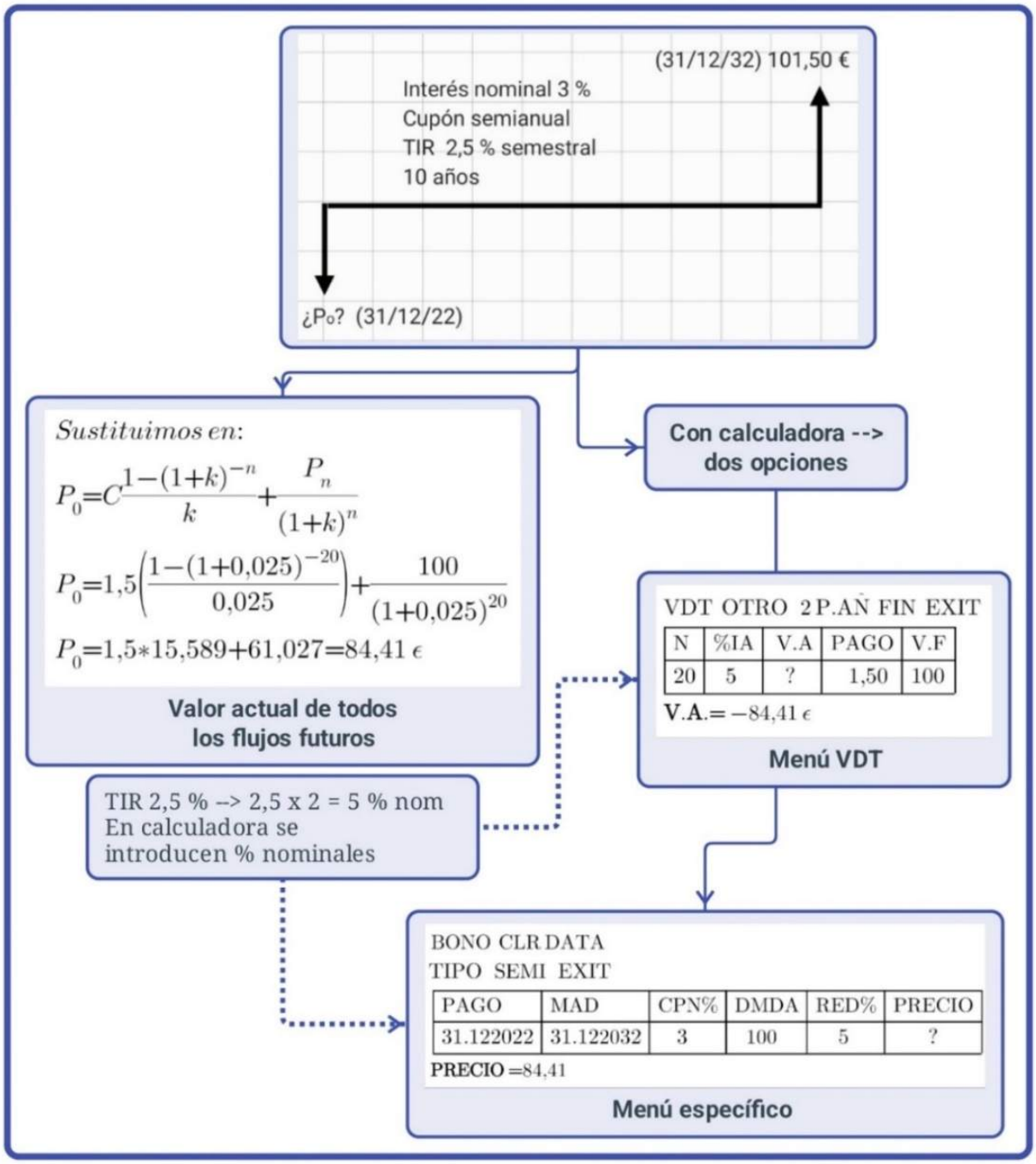


3.- El mismo día 30/06/2023, compramos en el mercado el bono indicado que cotiza a 102 %, considerando que está infravalorado. ¿Cuál será la rentabilidad TIR al vencimiento? ¿Y cuál es el rendimiento real al vencimiento suponiendo que hemos reinvertimos los cupones al interés compuesto del 3 %?

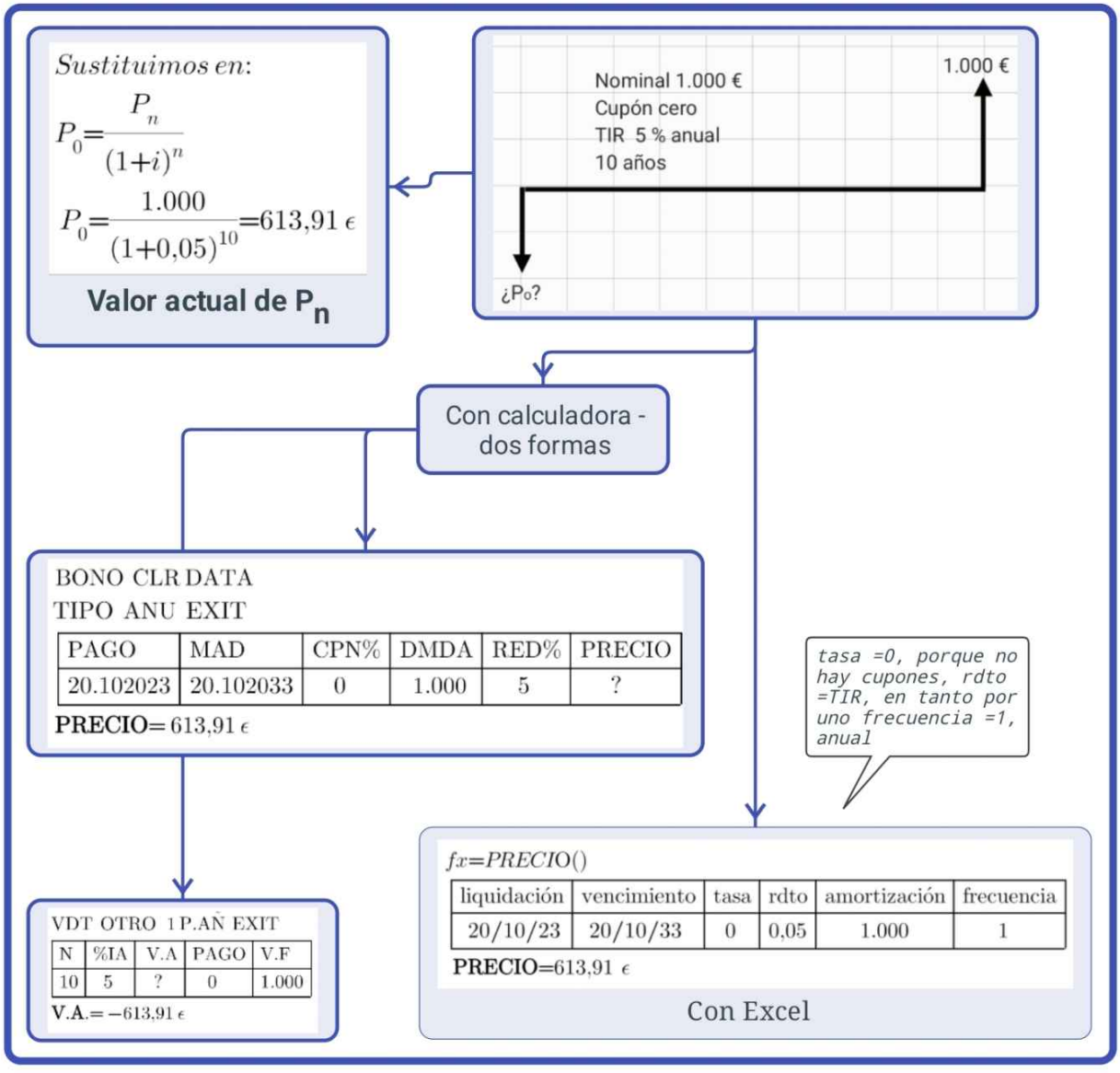


La TIR es del $4{,}13\ \%$, pero como los cupones se reinvierten al $3\ \%$ la rentabilidad real efectiva baja al $4{,}07\ \%$.

4.- Calcula el valor de un bono al 31/12/2022, al que le quedan 10 años hasta su vencimiento. Nominal de 100 €, paga un interés nominal del 3 % y la TIR del mercado a dicha fecha es del 2,5 % semestral.



5.- Una empresa quiere lanzar una emisión de bonos cupón cero de $1.000 €$ nominales con vencimiento a 10 años. La emisión será al descuento y quiere que los inversores obtengan una rentabilidad igual del $5\ \%$ anual. ¿A qué precio deberá emitir los bonos?



6.- Calcula el valor teórico de un bono perpetuo emitido por un banco, nominal de 100 €, por el que paga durante los 5 primeros años el 1 % anual y los siguientes el 3 % anual, considerando que la rentabilidad del mercado para operaciones similares es del 3,5 %.

Sustituimos en:

$$P_0 = C_1 \frac{1-(1+k)^{-5}}{k} + \frac{C_2}{k}(1+k)^{-5}$$

$$P_0 = 1\left(\frac{1-(1+0{,}035)^{-5}}{0{,}035}\right) + \frac{3}{0{,}035}(1+0{,}035)^{-5}$$

$$P_0 = 1*4{,}515 + 85{,}714*0{,}842$$

$$P_0 = 4{,}515 + 72{,}1689 = 76{,}68\,\epsilon$$

Con fórmula

Paso previo, valor bono al final 5° año

$$P_5 = \frac{C_2}{k} \Rightarrow P_5 = \frac{3}{0{,}035} = 85{,}714\,\epsilon$$

VDT OTRO 1 P.AÑ EXIT

N	%IA	V.A	PAGO	V.F
5	3,5	?	1	85,714

V.A. $= -76{,}684\,\epsilon$

Calculadora

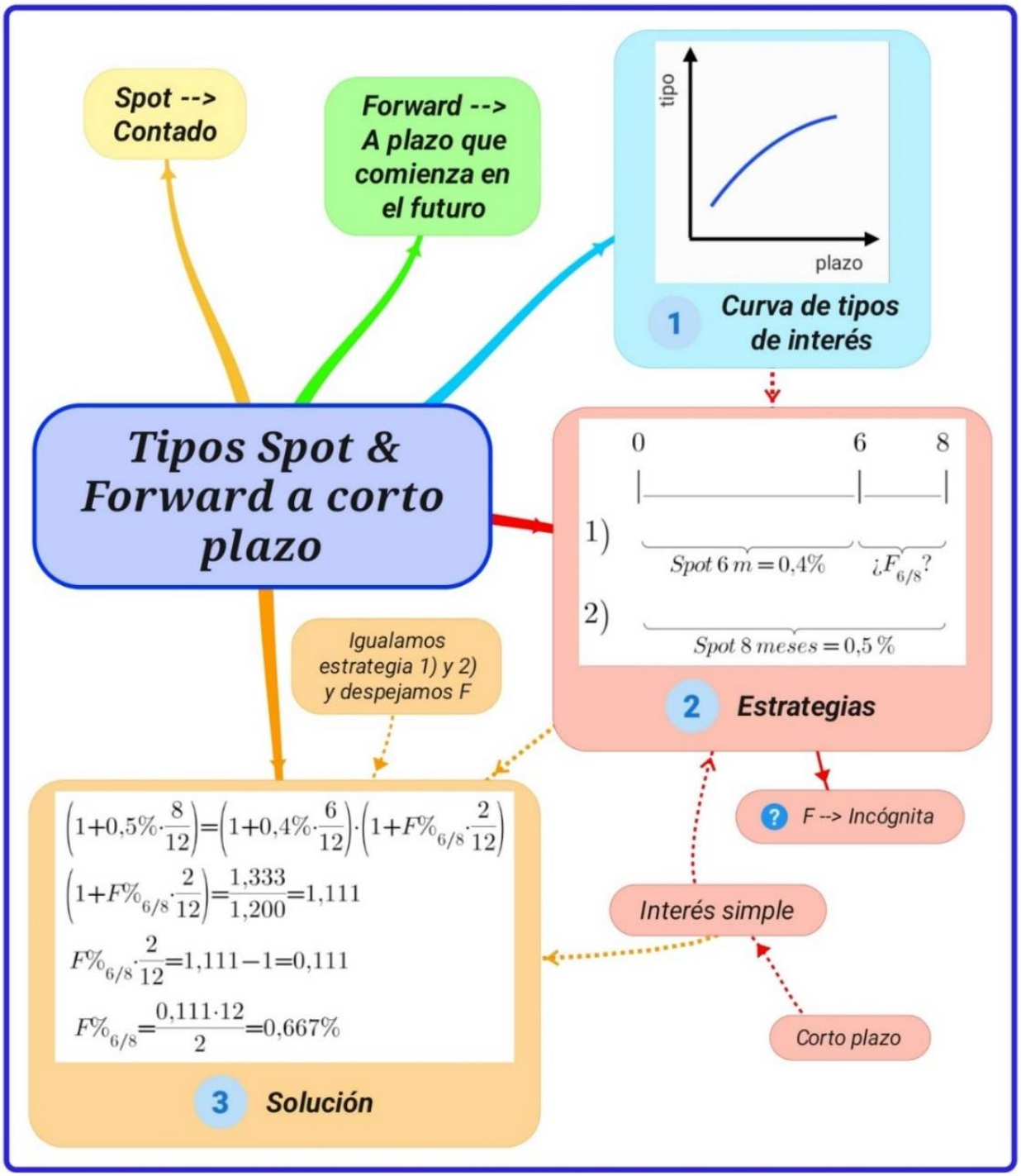
fx=**VA** ()

Tasa	Nper	Pago	Vf	Tipo
0,035	5	1	85,714	0

VA$=-76{,}684\,\epsilon$

Con Excel

91 Tipos Spot y Forward a corto plazo



(1) **Curva de tipos.** Esta curva relaciona el tipo de interés y plazo. Partimos, para este ejemplo, de una curva de tipos de interés

creciente. A mayor plazo, el tipo de interés aumenta. Esto se debe a que los inversores exigen una prima de riesgo por el incremento del plazo.

En este mapa analizamos la aplicación a corto plazo, por eso utilizamos tipo de interés simple.

(2) **Estrategias**. El Spot es un tipo de interés al contado y el Forward un tipo de interés aplicable a un producto financiero que comienza en el futuro.

El inversor para mantener la misma rentabilidad puede utilizar dos estrategias.

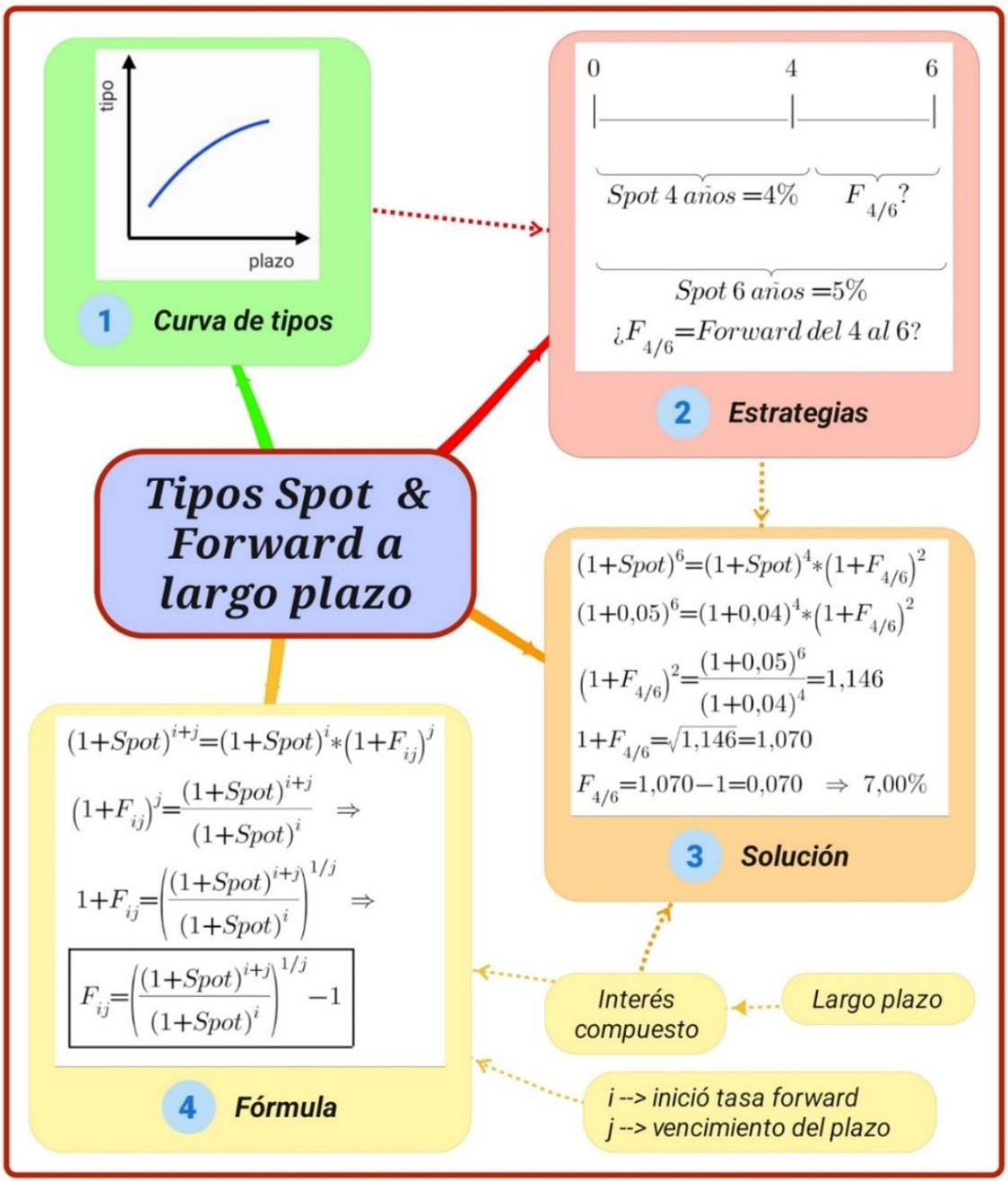
- ✓ Una, contratar a un tipo Spot durante un plazo parcial de la operación. Y contratar un interés Forward para cuando termina dicho plazo por el tiempo que resta hasta el final de la operación.
- ✓ Otra, contratar un tipo Spot durante todo el plazo de la operación.

De lo que se trata es de buscar la equivalencia entre ambas estrategias.

(3) **Solución**. La solución para el corto plazo es plantear la equivalencia con capitalización simple. Dado que por la curva de tipos del mercado, conocemos todos los tipos spot, la incógnita es calcular (F %), el tipo Forward. En el ejemplo, tratamos de buscar la equivalencia entre un tipo de interés Spot a seis meses, más un tipo de interés Forward por dos meses, con un tipo de interés al contado a ocho meses.

***

92 Tipos Spot y Forward a largo plazo



(1) **Curva de tipos**. Al igual que en el mapa anterior, partimos de una curva de tipos con pendiente positiva.

(2) **Estrategias.** También fijamos dos estrategias para calcular la equivalencia entre los tipos de interés.

Concretamente, dada una tabla de tipos Spot determinada, buscamos la tasa Forward de 4 a 6 años que sumada a la Spot de 0 a 4 es igual a la tasa Spot de 0 a 6 años.

(3) **Solución**. Planteamos la equivalencia financiera con interés compuesto porque se trata de largo plazo.

(4) **Fórmula.** En este apartado tratamos de obtener una fórmula que nos proporcione el resultado de la tasa Forward dentro de (i) períodos de tiempo por un plazo de vencimiento (j).

Para resolver un caso práctico se puede emplear la fórmula indicada, o bien, sustituir los tipos Spot en la ecuación de equivalencia, similar al ejemplo (3) y luego despejar (F %).

***

BLOQUE SEXTO – REPASO DE MATEMATICAS

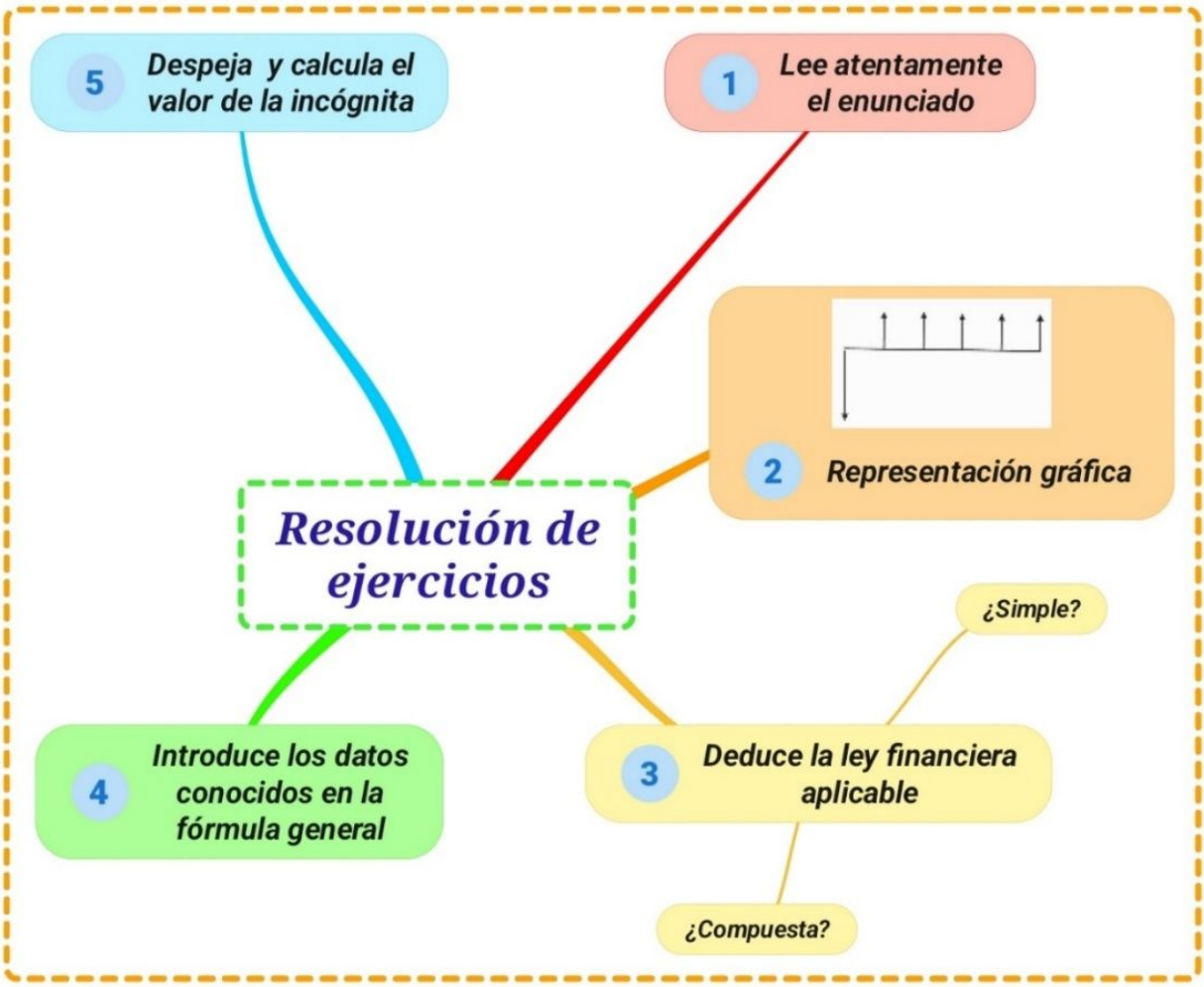
Lo importante es no dejar de hacerse preguntas.

ALBERT EINSTEIN

La duda suele ser el principio de la sabiduría.

M. SCOTT PECK

93 Resolución de ejercicios



Estos son los pasos a seguir para resolver un ejercicio de matemáticas financieras.

(1) En primer lugar, es conveniente una lectura atenta del problema.

(2) A continuación realizar un diagrama de flujos financieros.

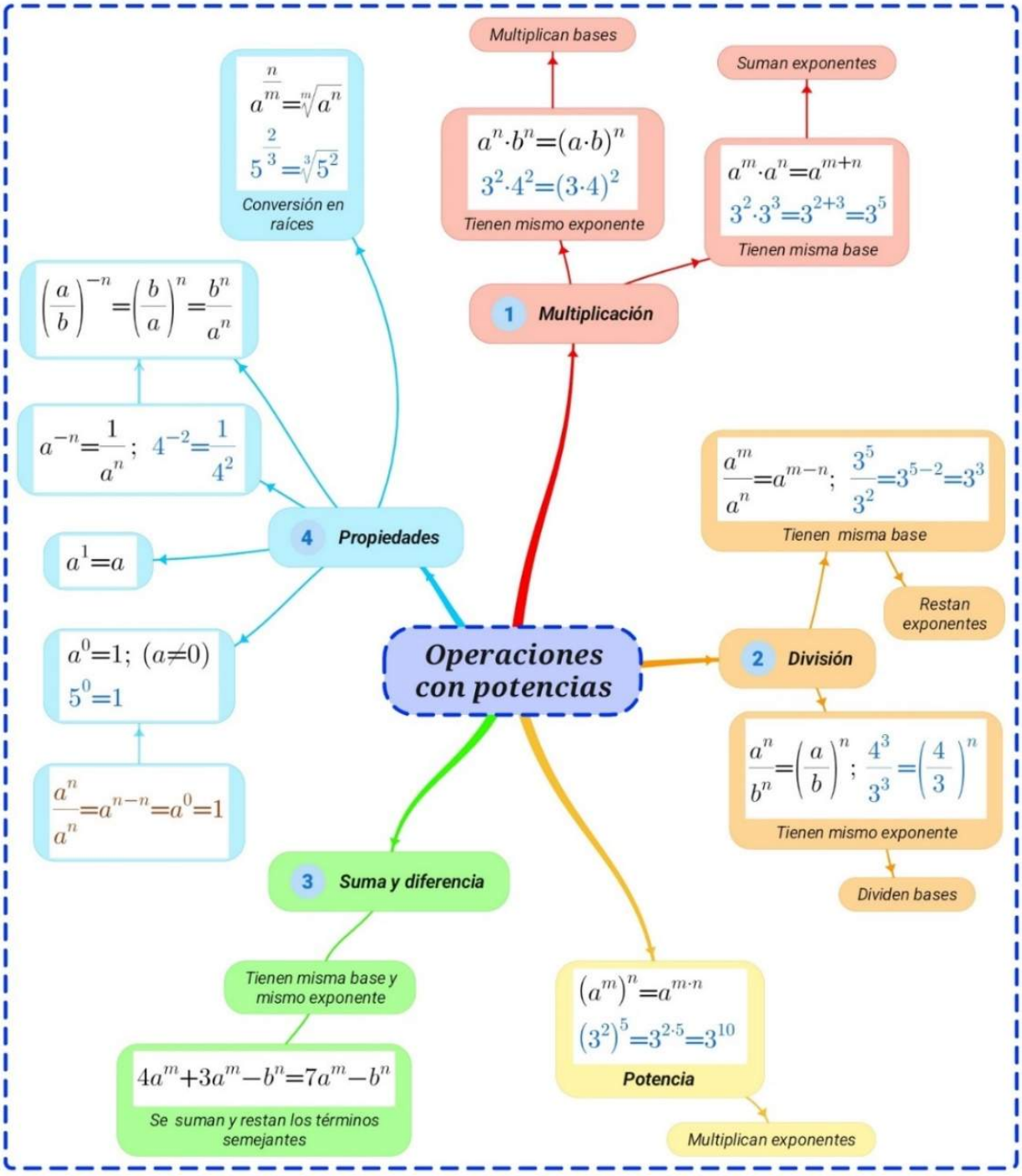
(3) Después debemos preguntarnos qué ley financiera se le aplica.

(4) Identificada la ley, introducimos los datos conocidos en su fórmula principal.

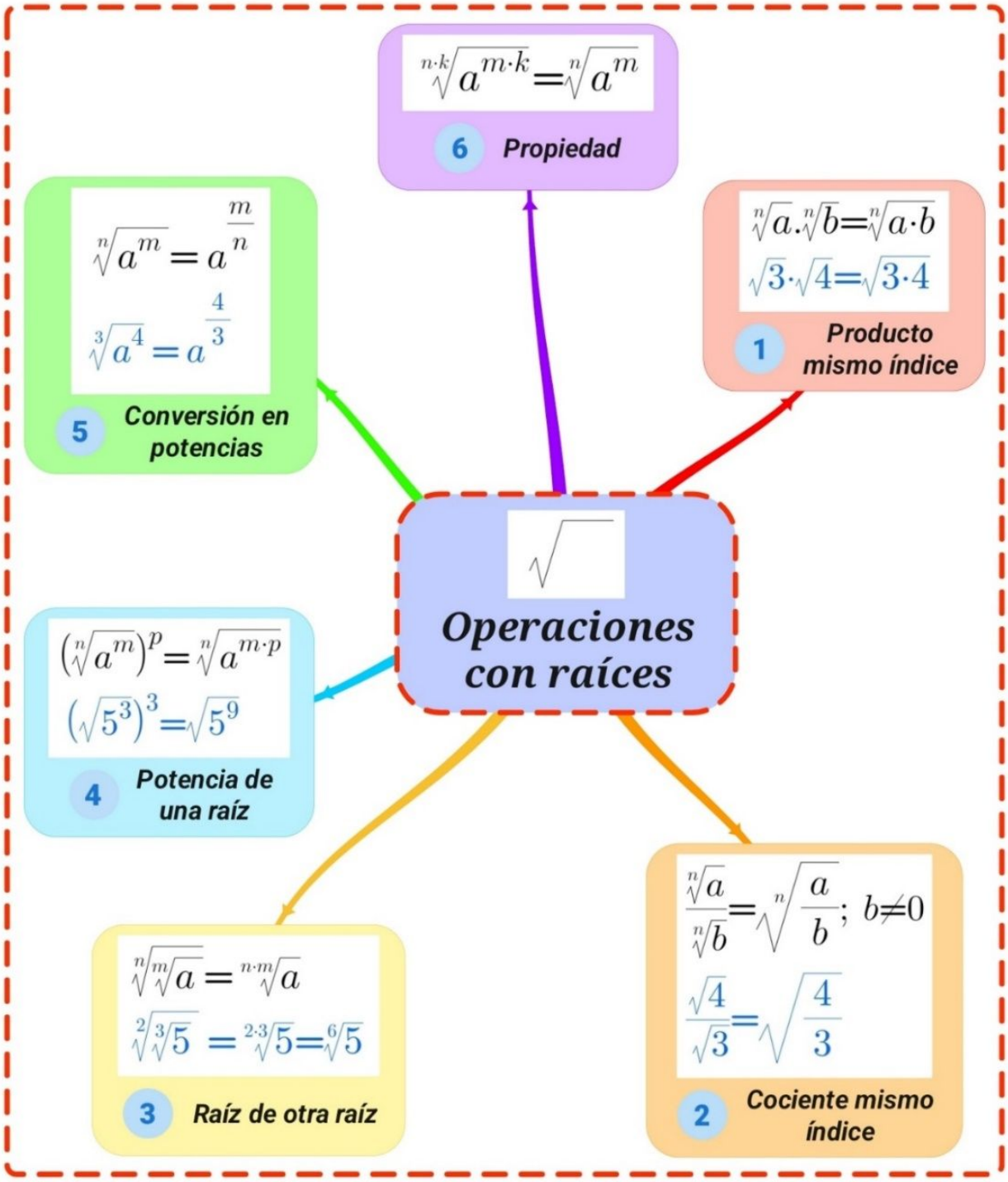
(5) Despejamos la incógnita y realizamos las operaciones para calcular su valor.

En los mapas siguientes realizamos un repaso de algunas operaciones matemáticas necesarias para despejar incógnitas con facilidad.

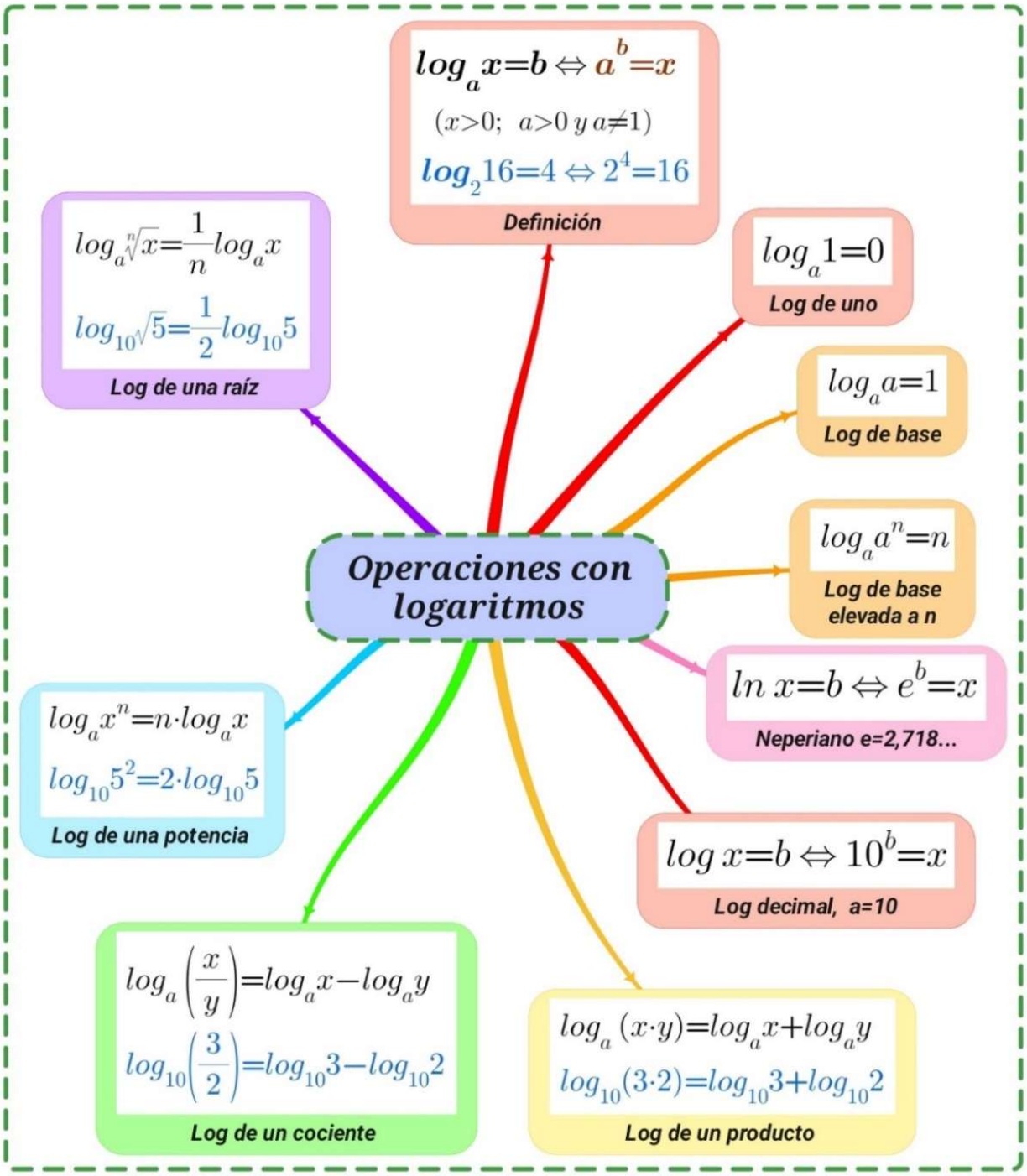
94 Operaciones con potencias



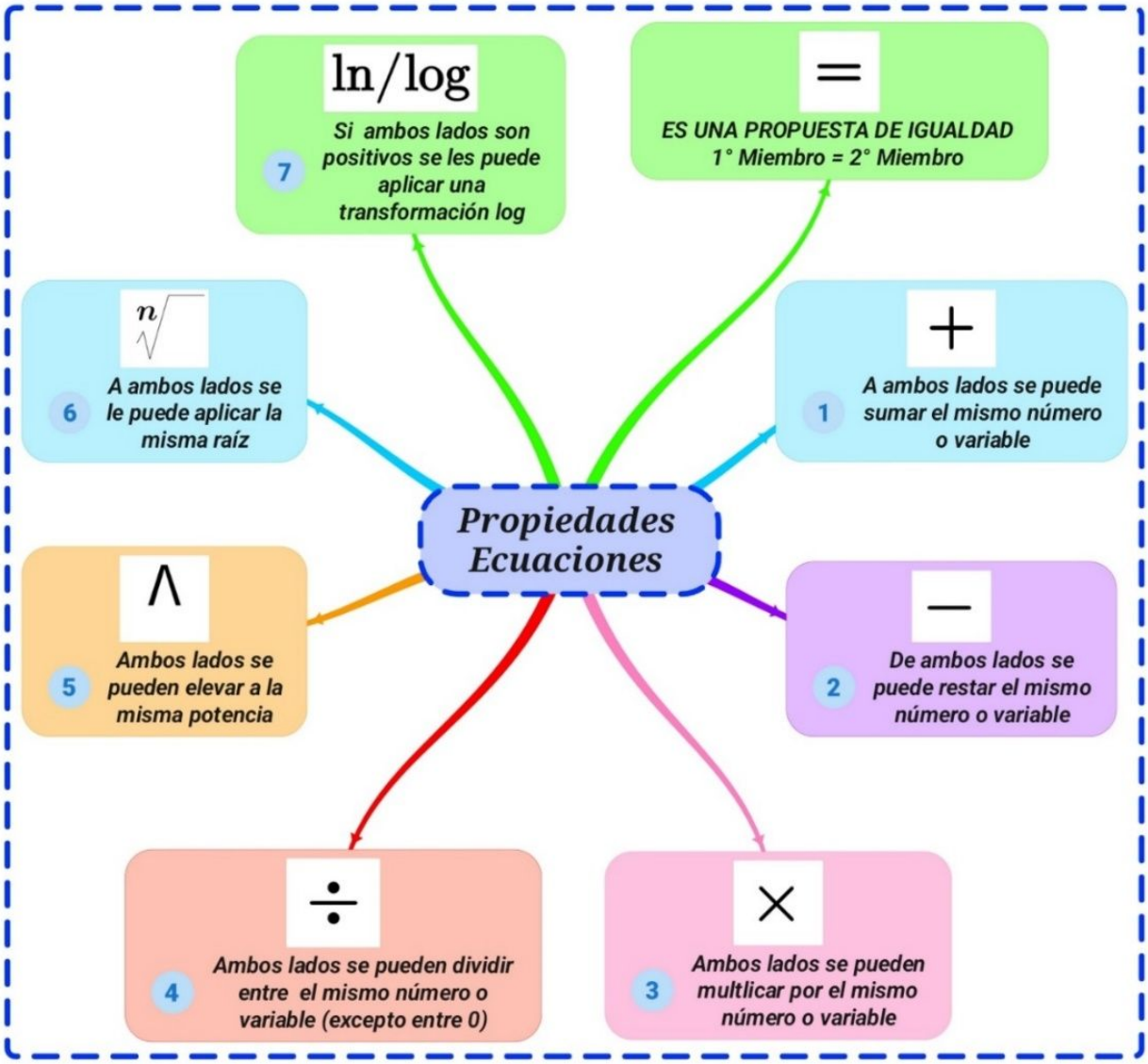
95 Operaciones con raíces



96 Operaciones con logaritmos

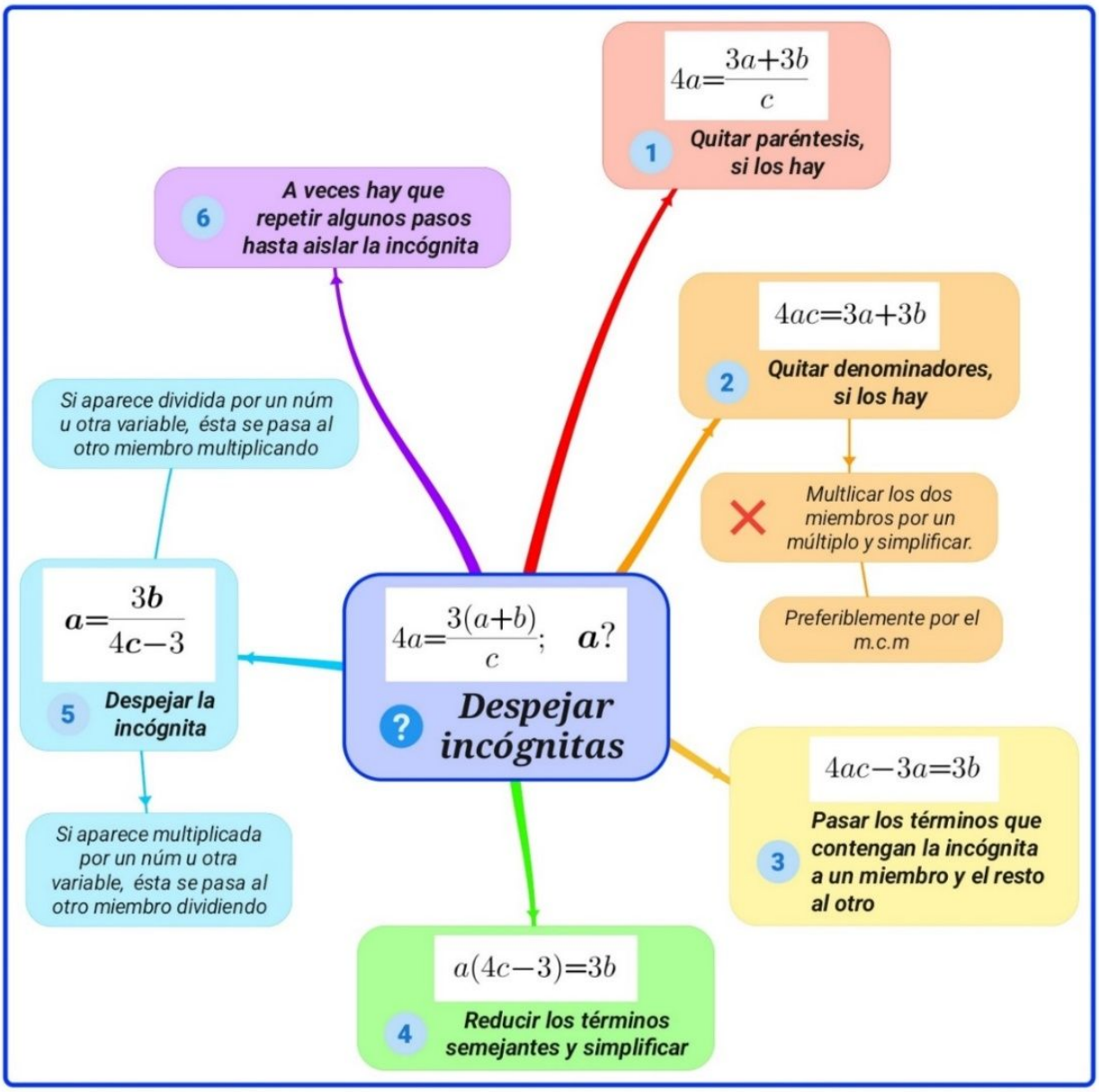


97 Propiedades de las ecuaciones



Estas propiedades nos ayudarán a manipular cualquier ecuación con objeto de despejar la variable que nos interesa obtener en problemas matemáticos en general, y en los de matemáticas financieras en particular.

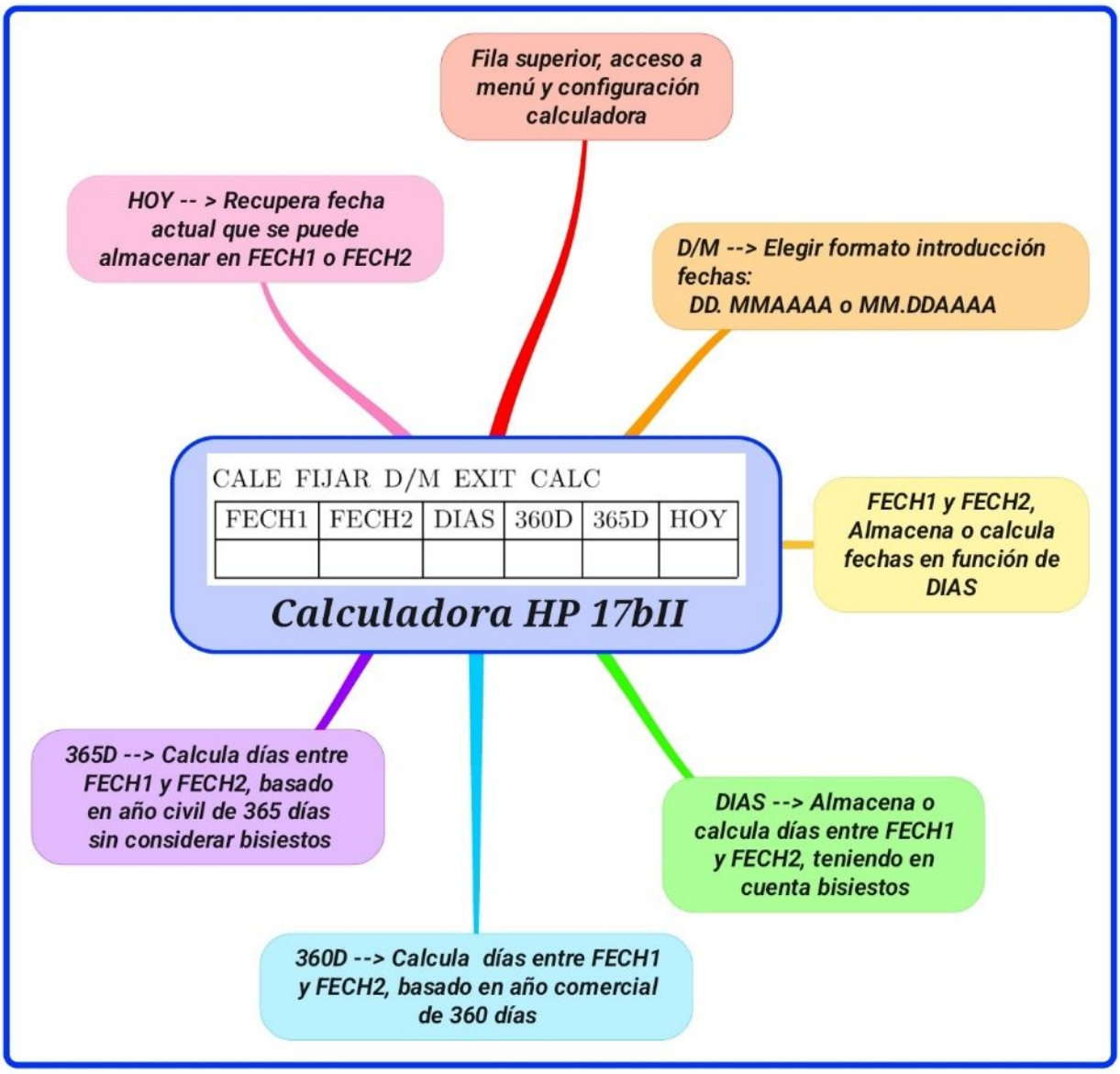
98 Pasos para despejar incógnitas



Un buen conocimiento sobre álgebra, concretamente en el despeje de incógnitas, ayuda en la resolución de ejercicios de matemáticas financieras porque evita sobrecargar la memoria con el aprendizaje de muchas fórmulas.

Entender bien los conceptos y la fórmula principal es suficiente para resolver la mayor parte de los problemas que nos planteen.

99 Cálculo de fechas con la calculadora financiera

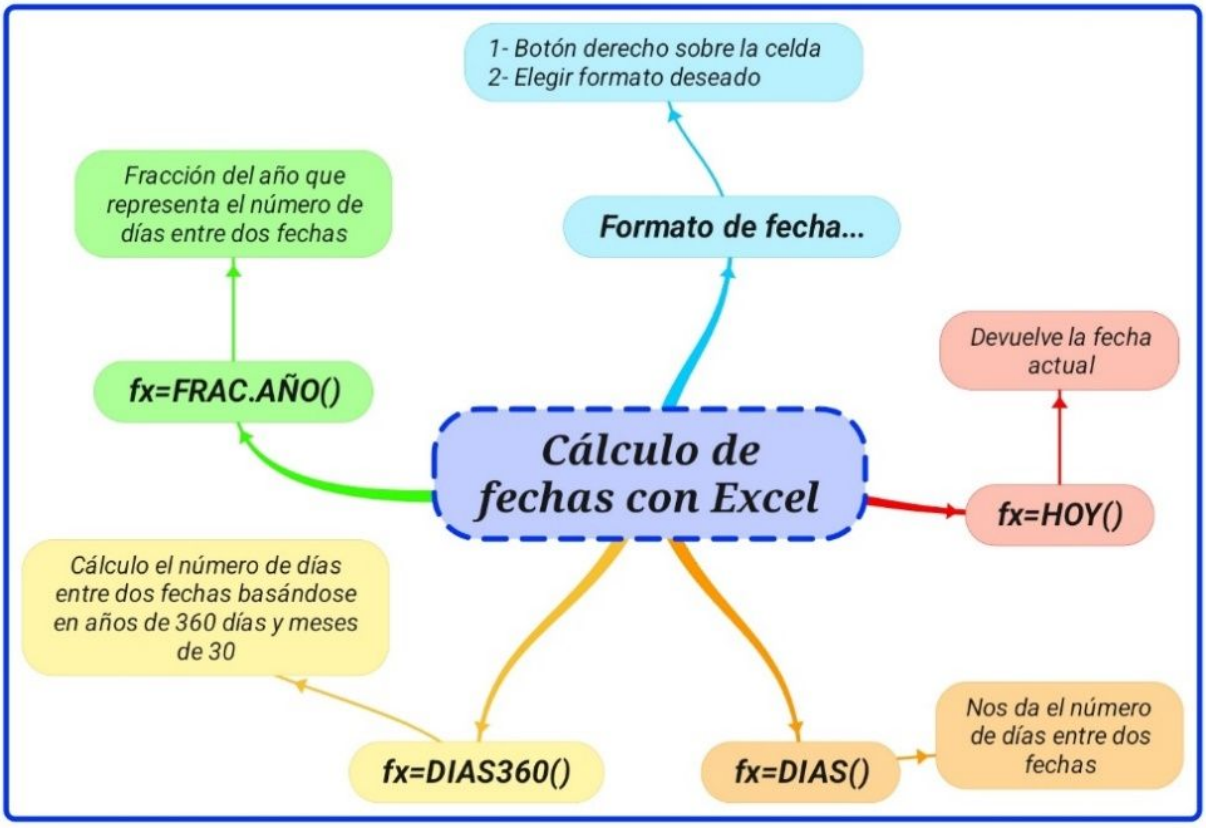


La aritmética sobre el tiempo es muy importante en matemáticas financieras. El tiempo está presente en la definición de capital financiero (C,t) debido al principio de subestimación de las necesidades futuras, y es necesario utilizarlo en todas las operaciones. Por ello es conveniente conocer cómo se calcula.

Además, en los contratos de operaciones financieras, el tiempo suele estar en forma de fecha de inicio o de vencimiento, por ello en muchos problemas es necesario calcular el tiempo interno que se ha de aplicar en las fórmulas.

Esto es lo que hace el menú (CALE) de la calculadora HP indicado en el mapa.

100 Cálculo de fechas con Excel



Excel tiene muchas funciones sobre cálculo de fechas y tiempo.

En este mapa se muestran las esenciales y similares a las que utilizan las calculadoras financieras, indicando el nombre de la función y el objetivo a calcular.

Se sugiere al lector, explore el menú FÓRMULAS/Fecha y hora, para verlas con detalle, y consulte la descripción y como utilizarlas en Ayuda de Excel.

***

Bibliografía

• Alfredo Díaz Mata y Víctor Manuel Aguilera Gómez. *Matemáticas financieras*. McGraw Hill. 2013.
• Andrés De Pablo López. *Matemática de las operaciones financieras I*. Ed UNED. 2005.
• Andrés De Pablo López. *Valoración financiera*. Ed Universitaria Ramón Areces. 2002.
• Armando Mora Zambrano. *Matemáticas financieras*. Alfaomega. 2009.
• Cesar Achig Guzmán. *Aplicaciones financieras de Excel*. Prociencia y cultura SA. 2006.
• Damián de la Fuente Sánchez e Inmaculada Para Martos. *Matemática de las operaciones financieras*. Ed Universitaria Ramón Areces. 2020.
• Daniel Arnaiz Boluda. *Matemáticas financieras*. Ed GO BEYOND. 2019.
• Eugene von Böhm-Bawerk. *Teoría positiva del capital*. Ed. Aosta 1998.
• *Guia del usuario calculadora HP 17bII+*. Hewlett-Packard. 2007.
• Isaac Pernas. *Matemáticas de las operaciones financieras*. 2017.
• Javier Miner. *Matemática financiera*. McGraw Hill. 2005.
• Luis Gil Peláez. *Matemática de las operaciones financieras*. Ed AC. 1993.
• Rafa Vivas. *Visual thinking works*. Ed Lunwerg. 2021.
• Rodrigo Ramos Ramos. *Matemáticas financieras*. Kindle. 2019.
• Tony Buzan. *Mapas mentales.* Alianta Editorial. (epub) 2019.
• Vicente T. González Catalá. *Análisis de las operaciones financieras y bursátiles*. Ed Ciencias Sociales. 1992.
• Xabier Brun, Oscar Elvira y Xavier Puig Pla. *Matemática financiera y estadística básica*. Ed PROFIT. 2008.
• Web del Banco de España.
• Zbigniew Kozikowski. *Matemáticas financieras*. McGraw Hill. 2007.

***